

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico
II (Economía Cuantitativa)



Análisis y medición del riesgo de incumplimientos a través de las
distribuciones condicionales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Alejandro Ferrer Pérez

Bajo la dirección de los doctores

José M. Casals Carro
Sonia Sotoca López

Madrid, 2013

ANÁLISIS Y MEDICIÓN DEL RIESGO DE INCUMPLIMIENTO A TRAVÉS DE LAS DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

Alejandro Ferrer Pérez

Universidad Complutense de Madrid



Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II
(Economía Cuantitativa)

Directores:

José M. Casals Carro

Sonia Sotoca López

A mi familia.

Thought suggests, and experience confirms, that such a dogma [that a scientific theory is none the worse if its premises are unrealistic] will be self indulging, permitting its practitioners to ignore or play down inconvenient departures of their theories from the observable real world.

Paul Samuelson.

Agradecimientos

La realización de una tesis doctoral es una empresa compleja. Como si de cruzar un océano se tratara, es fácil desanimarse si tras meses de navegación no se avista la otra orilla. Resulta habitual encallar, perder el rumbo, ser arrastrado por la corriente, sentirse intimidado por la inmensidad del mar abierto e incluso oír cantos de sirena que prometen menos sinsabores y mayor tiempo libre si se regresa a puerto.

Aunque algunas de estas dificultades acaban tornándose en satisfacciones (recomiendo especialmente abandonar el rumbo planeado y dejarse llevar por la corriente de vez en cuando, así como trabar amistad con las sirenas) y todas ellas suponen un aliciente a la expedición, es innegable que alcanzar la otra orilla requiere del concurso y ayuda de otros. Tanto en la sala de máquinas como por radio desde tierra firme.

Entre los primeros, José Casals y Sonia Sotoca, mis dos co-directores, han sido para mí unos excepcionales navegantes de los que aprender. Confiaron en mí y decidieron zarpar. En este tiempo he podido disfrutar de sus consejos y de su paciencia, y con ellos he podido comprender mejor los entresijos del oficio marino.

Entre los segundos, todos aquéllos que de una u otra forma se han interesado por esta expedición y, en especial, mis padres, quienes siempre me han animado a navegar, y Clara, quien, y aquí debo saltar a la metáfora financiera, me ha ofrecido siempre un apoyo incondicional, completo, eficiente y libre de riesgo.

A todos ellos, gracias.

Índice general

Agradecimientos	7
1. Introducción	13
2. Fundamentos del riesgo de incumplimiento	19
2.1. Introducción	19
2.2. Visión general	19
2.3. El modelo de pérdida	29
2.3.1. Introducción	29
2.3.2. Segmentación y estimación de la exposición efectiva	30
2.3.3. Proceso de cálculo	32
2.3.4. Usos y aplicaciones	33
2.3.5. Capital diversificado	34
2.3.6. Integración con otras herramientas	35
2.3.7. Relación con el marco regulatorio	35
2.3.8. Influencia del ciclo económico	36
2.3.9. Modelos de pérdida en la industria	37
2.4. La distribución de probabilidad de incumplimiento	37
2.4.1. Estructura de dependencia entre deudores	37
2.4.2. Representación del entorno económico	39
2.4.3. Horizonte de cálculo	40
2.4.4. Modelos de distribución	41
2.4.4.1. Visión general	41
2.4.4.2. Aproximación estática	43
2.4.4.3. Aproximación dinámica	45
2.4.5. Estimación del hazard rate	47
3. Modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento	49
3.1. Introducción	49
3.2. Medición incondicional del riesgo de incumplimiento	49
3.2.1. El problema de la no estacionariedad	49
3.2.2. Utilidad de las distribuciones condicionales	54
3.3. Modelo propuesto	55
3.4. Discusión	58
3.4.1. Relación con otros trabajos	58
3.4.2. Fundamentos	60

3.4.2.1.	Introducción	60
3.4.2.2.	Respuesta al problema de la no estacionariedad	60
3.4.2.3.	Sustento en las distribuciones condicionales	65
3.4.3.	Estimación y simulación	67
3.4.4.	Inclusión de variables macroeconómicas en la dinámica subyacente	68
3.5.	Aplicación a nivel cartera	68
3.5.1.	Consideraciones generales	68
3.5.2.	Ejemplos de dinámica subyacente multivariante	70
3.5.2.1.	Dinámica subyacente factorial	70
3.5.2.2.	Dinámica subyacente SUTSE	72
4.	Análisis empírico del riesgo de incumplimiento	75
4.1.	Introducción	75
4.2.	Series de hazard rates y modelos econométricos empleados	75
4.2.1.	Series de hazard rates	75
4.2.2.	Modelos econométricos	82
4.2.2.1.	Univariantes	82
4.2.2.2.	Multivariantes	82
4.3.	Estructura de los ejercicios empíricos	87
4.4.	Primer ejercicio: Comparación de modelos de distribución de probabilidad de incumplimiento	89
4.4.1.	Descripción	89
4.4.2.	Resultados y conclusiones	89
4.5.	Segundo ejercicio: Influencia de la ventana de cálculo	92
4.5.1.	Descripción	92
4.5.2.	Resultados y conclusiones	93
4.6.	Tercer ejercicio: Análisis de la distribución agregada	99
4.6.1.	Descripción	99
4.6.2.	Resultados y conclusiones	100
5.	Análisis condicional del riesgo de incumplimiento	105
5.1.	Introducción	105
5.2.	Marco analítico	106
5.2.1.	Introducción	106
5.2.2.	Aproximación empleada	106
5.2.3.	Análisis de la media	109
5.2.4.	Análisis de la volatilidad	109
5.3.	Métricas de riesgo condicionales	117
5.3.1.	Introducción	117
5.3.2.	Media condicional	117
5.3.3.	VaR condicional	120
5.3.4.	Capital condicional	120
5.3.5.	Correlación de activos condicional	123
5.4.	Fijación del nivel de cobertura con base condicional	125
5.4.1.	Introducción	125
5.4.2.	Discusión	125
5.4.3.	Análisis empírico	128

6. Simulación de Monte Carlo	133
6.1. Introducción	133
6.2. Fundamentos de la simulación eficiente	134
6.3. Esquema de simulación eficiente sobre la dimensión temporal	135
6.3.1. Introducción	135
6.3.2. Esquema de simulación propuesto	137
6.3.3. Discusión	140
6.3.4. Análisis empírico	142
6.3.5. Comparación con la simulación de Monte Carlo estándar	144
6.3.6. Aplicación a nivel cartera	145
6.4. Esquema de simulación eficiente extendido	146
6.4.1. Introducción	146
6.4.2. Esquema de simulación propuesto	147
6.4.3. Discusión	148
6.4.4. Análisis empírico	152
6.4.5. Comparación con la simulación de Monte Carlo estándar	155
6.4.6. Aplicación a nivel cartera	155
7. Reparto del capital	161
7.1. Introducción	161
7.2. Reparto del capital con base condicional	161
7.3. Esquema de reparto propuesto	163
7.4. Discusión	165
7.5. Análisis empírico	167
7.5.1. Introducción	167
7.5.2. Pesos del reparto condicional	167
7.5.3. Comparación de metodologías de reparto	172
8. Conclusiones	175
A. Tratamiento del riesgo específico	181
A.1. Introducción	181
A.2. Aproximación Normal	182
A.3. Aproximación Mixta	183
B. Metodologías de reparto del capital	185
B.1. Introducción	185
B.2. Fundamentos del proceso de reparto del capital	185
B.3. Método de reparto por Varianzas – Covarianzas	189
B.4. Método de reparto por Expected Shortfall	190
C. Herramientas estadísticas	193
C.1. Introducción	193
C.2. Modelo de función índice	193
C.3. Modelo factorial dinámico	196
C.4. Importance Sampling	196

Capítulo 1

Introducción

El trabajo de investigación que se presenta en este documento aborda un problema financiero, responde a un entorno económico y se enmarca en una discusión metodológica.

El problema tratado concierne a una cuestión inherente a toda entidad financiera dedicada a la banca comercial: el riesgo de incumplimiento, o de impago, al que se expone en los préstamos y créditos que concede. Siendo parte del riesgo de crédito, junto con otras posibles fuentes de incertidumbre, el riesgo de incumplimiento hace referencia a la potencial pérdida ocasionada por la declaración de impago del deudor. Su correcta medición constituye un problema complejo y relevante para las entidades por cuatro motivos.

Primero, el impacto en la organización. Una medición inadecuada no sólo puede conducir a la propia insolvencia de la entidad, sino que también, en un caso menos extremo, puede llevar a tomar decisiones estratégicas incorrectas y a la pérdida de eficiencia respecto a sus competidores. De hecho, la entidad obtiene del análisis y medición del riesgo de incumplimiento de su cartera información valiosa para su gestión en ámbitos como la planificación financiera o la medición del desempeño. Se trata, por tanto, de un proceso más amplio que el mero cálculo de la cifra de recursos propios.

Segundo, la necesidad de su tratamiento permanente. La cartera crediticia de la entidad está viva y varía con el vencimiento y nueva concesión de préstamos y créditos. Ello la hace sensible a las decisiones comerciales de la entidad, que pueden modificar su tamaño o perfil de riesgo. Incluso si dicho tamaño y perfil se mantienen fijos, el entorno económico, cambiante, influye sobre la capacidad de pago de los deudores y hace variar el riesgo de incumplimiento de la cartera. En consecuencia, su medición supone una tarea permanente que la entidad nunca puede dar por concluida.

Tercero, la dificultad técnica. Una entidad cuenta con numerosos préstamos y créditos, asociados a distintos productos y perfiles de riesgo, lo que comporta numerosos eventos de impago integrados en una amplia y heterogénea estructura de dependencias entre deudores. Ello exige una modelización sofisticada y un tratamiento analítico cuidadoso. Conlleva además un coste computacional intenso.

Cuarto, el mandato regulatorio. Además de por su propio interés y el de sus accionistas, las entidades bancarias deben medir de forma interna su riesgo de incumplimiento como parte de las obligaciones normativas a las que están sujetas desde el acuerdo de Basilea II, [13]. También el marco regulatorio sobre *stress test*, [34], impulsado tras la Gran Recesión, contempla la medición interna del riesgo. *Interna* significa con base en los propios modelos de la entidad, complementaria por tanto a la medición regulatoria, delimitada por las directrices que fijan los organismos supervisores. Esta imposición refuerza la necesidad de contar con un marco propio con el que medir el riesgo de incumplimiento y, puesto que el enfoque adoptado debe ser defendido ante el supervisor, exige un estándar de calidad elevado.

El enfoque habitual para analizar y medir el riesgo de incumplimiento en el caso de la banca comercial parte de un modelo de pérdida en el que el impago se considera un evento dicotómico vinculado a un horizonte temporal y cuyo valor esperado es la probabilidad de incumplimiento del deudor. Ésta no se toma como constante, sino como una variable aleatoria que comparten todos o parte de los deudores de la cartera. La distribución escogida para la probabilidad de incumplimiento influye significativamente en el modelo de pérdida y determina, al mismo tiempo, la incertidumbre sobre el impago, la dependencia entre deudores y la coyuntura que se refleja en el modelo.

Su identificación suele abordarse a partir de series históricas internas de impagos y supone una tarea crítica dentro del proceso de análisis y medición. Dicho proceso conlleva el empleo del modelo de pérdida en numerosas aplicaciones, incluida, en especial, la obtención de distintas métricas de riesgo, como la pérdida esperada o la cifra de capital exigible, para el conjunto de la cartera o para alguno de los grupos de deudores en los que se segmenta ésta.

El contexto económico es el dado por la severa crisis observada a finales de la primera década del siglo XXI, bautizada informalmente como la “Gran Recesión”. Una crisis precedida por una época prolongada de desempeño económico favorable, la “Gran Moderación”, que dejó paso a un marcado deterioro de la producción, el empleo, la estabilidad financiera y la solvencia soberana. Iniciada en Estados Unidos y propagada posteriormente a escala global, afectó en mayor medida a aquellas economías que, como la española, contaban con fuertes desequilibrios propios vinculados, entre otras causas, a la burbuja inmobiliaria larvada durante los años de expansión.

En el ámbito bancario, la Gran Moderación supuso bajas tasas de morosidad y aumento del apalancamiento de empresas y hogares, así como un mayor acceso a la financiación y plazos y límites mayores en los préstamos y créditos concedidos. La Gran Recesión trajo una marcada ruptura materializada en un notable aumento de la morosidad, la quiebra, intervención o fusión de numerosas entidades y la reducción del balance en otras, así como fuertes restricciones en el acceso al mercado de capitales y a la financiación minorista.

Entre las causas de este colapso se han señalado la regulación bancaria, por incorrecta o insuficiente, la excesiva benevolencia hacia el endeudamiento privado bajo la creencia de que se vivía una nueva era marcada por la estabilidad financiera (*this-time-is-different syndrome*), la asunción de esquemas de incentivos demasiado sesgados hacia

los objetivos de corto plazo (*disaster myopia*) o la confianza injustificada en el crecimiento ininterrumpido de la economía en general y del valor de los activos empleados como garantía en particular (*irrational exuberance*).

Esta profunda crisis en el sistema bancario trajo un nuevo desarrollo normativo, Basilea III, [18] y [15], en el que se corrigen, amplían y endurecen los requerimientos vigentes durante la Gran Recesión. También ha surgido desde entonces un interés creciente en los organismos supervisores y en las propias entidades financieras por comprender los fallos y limitaciones de los planteamientos actuales para la medición del riesgo, incluido el de incumplimiento.

La discusión metodológica hace referencia al enfoque a seguir en la modelización del riesgo de incumplimiento, sobre todo en lo relativo a su distribución de probabilidad, para la que pueden distinguirse dos corrientes: estática, fundamentada en el ajuste de una distribución paramétrica, y dinámica, más cercana a la consideración explícita de la probabilidad de impago como un proceso estocástico.

Esta disyuntiva, que enlaza con la discusión más general sobre el carácter estable o cíclico que deben presentar los recursos propios de las entidades, tiene implicaciones directas en cuestiones como los usos que pueden derivarse del modelo de pérdida, la forma en que éste puede integrarse con otras herramientas de gestión del riesgo de la entidad, su interpretación económica o las hipótesis que lo sustentan, en especial en lo que respecta a la dependencia entre deudores. También influye en aspectos relativos a la implementación del modelo, como son la bondad de ajuste a los datos, el proceso de identificación, estimación o simulación, la incorporación de variables exógenas o la flexibilidad ante cambios en el horizonte temporal considerado para el evento de impago.

La diferencia entre los enfoques estático y dinámico se refleja también en las dos principales clases de distribuciones de probabilidad de incumplimiento que se consideran en la práctica. Por un lado, las condicionadas a un determinado escenario económico o valor de las variables exógenas, empleadas sobre todo para el análisis de escenarios y la predicción y que se enmarcan en la aproximación dinámica. Por otro lado, las denominadas distribuciones de ciclo completo, de largo plazo o incondicionales, empleadas para obtener métricas de riesgo representativas de un periodo de tiempo prolongado y que se enmarcan en la aproximación estática.

Ambas tipologías, condicional e incondicional, poseen características propias y responden a planteamientos distintos. Las distribuciones condicionales cuentan con buenas propiedades analíticas, dado que admiten una modelización probabilística clara en términos de sucesos condicionados, mientras que las distribuciones incondicionales tienen un gran relevancia como instrumento con el que obtener una medición estable, lo que resulta deseable dado el coste que puede suponer para la entidad una gestión del riesgo demasiado sensible al ciclo económico.

En el contexto que definen los tres pilares anteriores, problema financiero, entorno económico y discusión metodológica, el objetivo de este trabajo es explorar el potencial de las distribuciones condicionales como instrumento central con el que abordar, desde

una perspectiva general, el análisis y medición del riesgo de incumplimiento, incluida, especialmente, la medición incondicional.

Este objetivo profundiza en las líneas desarrolladas en otros trabajos que, como [143], [106], [36], [140], [161], [132], [131] y [128], también consideran las distribuciones condicionales en el estudio de distintos aspectos del riesgo de incumplimiento, como su evolución temporal, su relación con el ciclo económico, sus determinantes o las mejores políticas para su gestión o supervisión, pero que, no obstante, no abordan un análisis integral y sistemático de su utilidad como herramienta general de modelización. Además, este objetivo se relaciona estrechamente con los tres pilares.

En el caso de los problemas aparejados a la medición del riesgo, porque las distribuciones condicionales pueden resultar un instrumento eficaz con el que tratarlos. Así, por ejemplo, cuestiones como la elección del grado de cobertura que deben proporcionar los recursos propios o el análisis de la diversificación que generan las distintas componentes de la cartera crediticia (impacto en la organización), los determinantes de la evolución de las métricas de riesgo a lo largo del tiempo (tratamiento permanente), la disminución del coste computacional o la definición de la dependencia entre deudores (dificultad técnica) y la obtención y aplicación de nueva información sobre la cartera que mejore la gestión de su riesgo (mandato regulatorio) son abordadas en este trabajo a través de las distribuciones condicionales.

En el caso del entorno económico determinado por la Gran Recesión y sus consecuencias, porque las distribuciones condicionales, que existen para cada periodo de tiempo y están bien definidas en términos del suceso condicionante, pueden ayudar a comprender algunas de las cuestiones clave suscitadas a raíz de la Gran Recesión: ¿Es realmente posible obtener una medición incondicional? ¿En qué medida se ve afectada la dependencia entre deudores, así como las métricas de riesgo, por el entorno económico reflejado en el modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento? ¿Qué influencia tiene la ventana temporal empleada como referencia de ciclo completo en esta clase de medición?

En el caso de la discusión metodológica, por dos motivos. Por un lado, porque las distribuciones condicionales suponen el exponente principal de la aproximación dinámica, por lo que profundizar en las primeras conlleva profundizar en la segunda. Por otro lado, porque el estudio no se limita a las aplicaciones naturales de las distribuciones condicionales, como son el análisis de escenarios o la predicción, sino que aborda también la medición de largo plazo, tradicionalmente reservada a la aproximación estática. Se trata, por tanto, de estudiar la utilidad de la aproximación dinámica como complemento, e incluso sustituto, de la estática.

El trabajo se estructura como sigue.

En el Capítulo 2 se introduce el concepto de riesgo de incumplimiento desde la perspectiva de la banca comercial tradicional. Se revisan sus aspectos teóricos, aplicados e instrumentales y se plantean los principales problemas asociados a su análisis y medición, incluyendo las dificultades prácticas que enfrenta una entidad financiera. Se presentan también las aproximaciones habituales a la modelización, con especial

atención a las que sustentan el desarrollo posterior, y se establece la notación básica empleada a lo largo del trabajo.

El Capítulo 3 constituye el núcleo del trabajo y se divide en tres partes. En la primera parte se discuten las debilidades de la medición de largo plazo en presencia de no estacionariedad en la probabilidad de incumplimiento de los deudores y se exponen las ventajas teóricas y prácticas que se derivan de una aproximación alternativa con base en las distribuciones condicionales. En la segunda parte se propone un modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento coherente con las consideraciones apuntadas en la primera parte del capítulo. Este modelo permite abordar una medición de ciclo completo a través de las distribuciones condicionales y acompaña el estudio del riesgo de incumplimiento efectuado a lo largo del trabajo. En la tercera parte se aborda una discusión minuciosa de los fundamentos del modelo, su relación con otros trabajos existentes en la literatura, los procedimientos de estimación y simulación y las consideraciones prácticas aparejadas a su aplicación sobre una cartera crediticia real.

En el Capítulo 4 se estudia empíricamente el riesgo de incumplimiento tomando como herramienta de análisis el modelo presentado en el Capítulo 3. Se consideran series norteamericanas históricas de impagos asociados a las líneas de negocio típicas de un banco comercial, como son los préstamos a empresas o las hipotecas. Con base en ellas se define una cartera sintética representativa que sustenta los tres ejercicios empíricos realizados. En ellos se exploran las principales cuestiones subrayadas en el Capítulo 3, como la diferencia entre el marco estático y el dinámico o la influencia de la ventana temporal de referencia en la medición de ciclo completo.

El Capítulo 5 se dedica al análisis del riesgo de incumplimiento en la dimensión temporal, lo que supone centrar el análisis en las distribuciones condicionales y su potencial para capturar la evolución del riesgo de incumplimiento a lo largo del tiempo. Se deriva primero un marco analítico que sustenta el desarrollo posterior, dividido en dos líneas. Por un lado, la relación entre las métricas de riesgo y el ciclo económico, cómo y por qué varían las primeras al variar el segundo. Por otro lado, el empleo de las distribuciones condicionales como herramienta alternativa con la que abordar de forma consistente problemas vinculados a la medición de ciclo completo.

En el Capítulo 6 se aborda la simulación eficiente del modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento propuesto en el Capítulo 3. Ésta es una cuestión de gran importancia práctica, puesto que la obtención de las métricas de riesgo y, en general, muchas de las aplicaciones del modelo de pérdida, exigen simulación Monte Carlo, lo que conlleva un notable coste computacional. Para este problema se proponen dos algoritmos que aprovechan el sustento condicional del modelo y permiten distintos grados de complejidad en su aplicación. Además de ejercicios empíricos en los que se comprueba la eficacia de ambos algoritmos, se establece su calibración óptima y se discuten detalles de su implementación a nivel univariante y multivariante.

El Capítulo 7 trata el problema del reparto del capital agregado de la cartera crediticia, estimado a partir del modelo de pérdida, entre las componentes que la forman. Se propone una metodología alternativa a la aproximación habitual en el caso del reparto de ciclo completo que descansa, como sucede en los desarrollos precedentes, en

las distribuciones condicionales e incorpora los resultados obtenidos en el Capítulo 6. Además de probar su consistencia y discutir sus ventajas y consideraciones prácticas, se estudia empíricamente su comportamiento. Esta metodología completa el estudio del riesgo de incumplimiento a través de las distribuciones condicionales.

En el Capítulo 8 se resumen las principales aportaciones y resultados del trabajo y se proponen futuras líneas de investigación. Entre ellas cabe destacar la extensión del modelo propuesto en el Capítulo 3 para recoger otras fuentes de incertidumbre, como la tasa de recuperación tras el impago, la aplicación de las distribuciones condicionales en otros problemas vinculados al análisis y medición del riesgo de incumplimiento, como el de la segmentación de los deudores que forman la cartera, y la obtención de mayor evidencia empírica, en especial a través de nuevos ejercicios que comprendan varios sectores y países.

Finalmente se incluyen tres apéndices. En el Apéndice A y en el B se profundiza, respectivamente, en el tratamiento del denominado riesgo de incumplimiento específico y en el proceso de reparto del capital, éste último estudiado en el Capítulo 7. Por último, en el Apéndice C se revisan algunas herramientas estadísticas avanzadas utilizadas en el cuerpo del trabajo.

Capítulo 2

Fundamentos del riesgo de incumplimiento

2.1. Introducción

En este capítulo se revisan de forma breve los principales conceptos y resultados sobre riesgo de incumplimiento que resultan de interés para el resto de este trabajo, así como las aproximaciones existentes a su medición.

Entre los manuales que cubren o extienden los puntos discutidos a continuación, y en los que también se abordan otros muchos no tratados, cabe destacar [22], [47], [119] y [112]. Las referencias citadas ofrecen además una visión más completa sobre el tema al que están vinculadas.

La estructura del capítulo es la siguiente: en el segundo apartado se introduce el problema de la medición del riesgo de incumplimiento, mientras que en los dos siguientes se profundiza, respectivamente, en el modelo de pérdida y en su principal componente, la distribución de probabilidad de incumplimiento de los deudores de la entidad.

2.2. Visión general

Una entidad financiera tradicional dedicada a la banca comercial relaciona ahorro con inversión y consumo a través de la captura de depósitos y la concesión de préstamos y créditos. Como resultado de esta actividad, la entidad cuenta entre su activo con una *cartera crediticia* formada por M derechos de cobro, préstamos y créditos, que a lo largo de este trabajo se identifican con M deudores¹ y que están expuestos a *riesgo de*

¹ Aunque es el deudor, cliente de la entidad financiera, el que impaga, la denominación no es, en realidad, unívoca: un mismo deudor puede ser titular de varios préstamos o créditos con una misma entidad, en cuyo caso sería más adecuado hablar de *operación*. No obstante, y con el fin de clarificar la exposición, con carácter general se conserva la denominación de deudor.

crédito.

Aunque la entidad puede estar expuesta al riesgo de crédito en otras posiciones, como derivados o al actuar como contrapartida, a lo largo de este trabajo el interés se centra en la cartera crediticia de préstamos y créditos concedidos, activos que constituyen el negocio fundamental de un banco comercial.

En lo que sigue el tiempo se mide de forma discreta² a través de intervalos de tiempo regulares, siendo t el periodo actual, periodo en el que la entidad *mide* el riesgo de crédito a un *horizonte de cálculo* Q , lo que significa que (i) la cartera crediticia considerada es la que está *viva* (expuesta al riesgo) en t , y (ii) sólo se considera el riesgo de crédito que puede aparecer entre los periodos $t + 1$ y $t + Q$, ambos incluidos. Por simplicidad, se asume la hipótesis estándar de *cartera constante*, de forma que ésta no crece ni decrece a lo largo de los Q periodos. En particular, todos los deudores están vivos durante los Q periodos.

Los deudores están sujetos a riesgo de crédito puesto que son susceptibles de causar una pérdida a la entidad si incumplen las obligaciones de pago contraídas con ésta o si su *calidad crediticia* (capacidad de pago) varía y con ella el valor de mercado del préstamo o crédito del que son titulares.

En el primer caso la pérdida se produce como consecuencia del evento dicotómico de impago, lo que da lugar a los modelos de *incumplimiento* o de *default*. Este es el evento de riesgo considerado en este trabajo y discutido a continuación. El otro, variación de la calidad crediticia del deudor, da lugar a los denominados modelos de *migración* o *mark-to-market*, en los que cada deudor es asignado a un nivel o estado discreto de *calidad crediticia*, vinculado a su probabilidad de impago y que determina parcialmente el valor de la posición. El evento de riesgo es entonces la migración del deudor a un nuevo nivel, inferior al inicial, en el que el activo adquiere un valor de mercado menor³. Estos modelos se emplean habitualmente en ejercicios de valoración, hacen uso de las *cadenas de Markov* como herramienta estadística principal y pueden entenderse como una generalización de los modelos de incumplimiento⁴. La Figura 2.1 representa el enfoque de migración, del que [96] supone una referencia central.

² La modelización del riesgo de crédito en tiempo continuo, no abordada en este trabajo, ha dado lugar a una extensa literatura. Bajo esta aproximación los determinantes del incumplimiento siguen procesos en tiempo continuo y pueden distinguirse, de forma mucho más notable que en el caso de la modelización en tiempo discreto, una división entre modelos *estructurales*, como el trabajo pionero de [126], y *reducidos*, como los trabajos centrales de [56] y [111]. En el enfoque estructural, el incumplimiento, individual o de un grupo de activos, se expresa en términos de sus primitivos, como, por ejemplo, el valor de mercado de la deuda y los activos de la empresa emisora, en el caso de un bono. En un enfoque reducido, la probabilidad de incumplimiento instantánea (o *intensidad*) es caracterizada directamente como un proceso estocástico en tiempo continuo.

³ Ya que, en general, el valor económico de cualquier activo financiero sujeto a riesgo de crédito decrece con el aumento de éste.

⁴ Puesto que en un modelo de incumplimiento pueden distinguirse dos estados: impago y no impago.

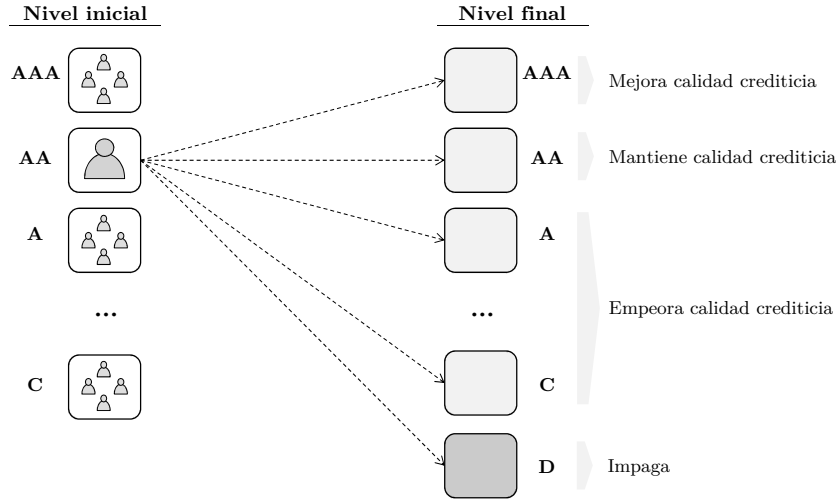


Figura 2.1: En un modelo de migración los deudores están asignados a niveles de calificación y el evento de riesgo es la migración a un nivel inferior al final del horizonte de cálculo, entre los que se encuentra el de impago (D).

En el caso de los modelos de incumplimiento, el evento modelizado es el impago y se distinguen tres fuentes de incertidumbre que pueden dar lugar a la pérdida: (i) el propio evento de impago, que supone una variable aleatoria dicotómica cuyo valor esperado es la *probabilidad de impago* del deudor, (ii) la exposición al riesgo, que supone el valor nominal de préstamo o crédito en el momento de impago si se produjera éste, y (iii) el porcentaje de dicho importe que la entidad no logra recuperar tras la declaración del impago. Estas fuentes de incertidumbre se integran de forma multiplicativa: dado un activo, existe pérdida si se produce el impago y el valor económico de ésta viene dado por la fracción del préstamo o crédito expuesta al riesgo que no se recupera después del impago. Formalmente, la pérdida del deudor i -ésimo de la cartera de la entidad viene dada por:

$$L^i = I^i ead^i s^i \quad (2.1)$$

donde I^i es el evento de impago:

$$I^i = \begin{cases} 1 & \text{prob. } pd^i \\ 0 & \text{prob. } 1 - pd^i \end{cases} \quad (2.2)$$

y pd^i , ead^i y s^i son, respectivamente, la PD (*probability of default*), EAD⁵ (*exposure at default*) y LGD (*lost given default*) del deudor i -ésimo de la cartera de la entidad.

⁵ En ocasiones ead^i se representa en términos del valor nominal residual del préstamo o crédito en t , B^i , que es determinista, multiplicado por un factor estocástico que incorpora la variación de éste a la fecha de incumplimiento, ccf^i (*credit conversion factor*). Es decir, $ead^i = B^i ccf^i$. No obstante, a los efectos de este trabajo esta distinción no resulta relevante.

La pérdida total de la cartera es entonces:

$$L = \sum_{i=1}^M L^i \quad (2.3)$$

siendo M el número total de deudores de la cartera.

Las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) definen un *modelo de pérdida* para la cartera, modelo sobre el que deben determinarse dos cuestiones. Por un lado, el posible carácter aleatorio de ead^i y s^i . Por otro, la posible dependencia entre deudores y, dado un deudor, entre sus fuentes de incertidumbre.

En lo que respecta a la primera cuestión, asumir un carácter estocástico de ambos parámetros resulta razonable, en especial en el caso de s^i , que también depende del valor de las garantías que subyacen al préstamo o crédito. [5] obtiene, de hecho, evidencia empírica de la dependencia entre riesgo de incumplimiento y tasa de recuperación. En consecuencia, el tratamiento de ead^i y s^i como variables aleatorias resulta conveniente para reflejar de forma fiel el riesgo de crédito que enfrenta la entidad en su cartera crediticia, como sucede en los modelos planteados por [26], [36], [10] y [142], entre otros.

No obstante, este trabajo se centra en el riesgo de incumplimiento, por lo que resulta preferible simplificar la estructura del modelo para aislar una única fuente de incertidumbre: el cumplimiento o no de la obligación de pago por parte del deudor, incertidumbre recogida en la variable I^i . Por ello, ead^i y s^i se asumen constantes, aunque potencialmente distintas entre deudores, lo que supone una hipótesis (i) eficaz para el análisis, (ii) no restrictiva a efectos de I^i , y (iii) estándar en la literatura sobre riesgo de incumplimiento. En todo caso, esta asunción no implica la negación de la citada aleatoriedad.

Si la EAD y la LGD se asumen constantes, su consideración por separado es irrelevante y, para simplificar la notación, se define la *exposición efectiva* del deudor i como $e^i = ead^i s^i$, de forma que el modelo anterior queda:

$$L = \sum_{i=1}^M L^i = \sum_{i=1}^M I^i e^i \quad (2.4)$$

En lo que respecta a la dependencia entre deudores, la asunción de exposición efectiva constante reduce ésta a la dependencia entre variables indicadoras de incumplimiento I^i , lo que implica definir una distribución dicotómica M -variante $\mathbf{I} = (I^1, \dots, I^M)$. En la literatura pueden distinguirse dos enfoques principales para definir esta estructura, enfoques que difieren también en la interpretación del evento de impago.

Por un lado, los modelos de *contagio*, donde el impago del deudor se produce bien por causas propias o bien como consecuencia del impago de otros deudores que, a través de una cadena de proveedores, deudas pendientes de cobro, integración vertical o cualquier otra red que establezca una dependencia entre ellos, acaba induciendo en

el deudor inicial el incumplimiento de sus obligaciones con la entidad.

Por otro lado, los modelos de *independencia condicional*, en los que la probabilidad de impago de cada deudor de la cartera queda determinada por factores externos comunes a todos ellos, como por ejemplo el estado de la economía. Una vez materializados dichos factores, el valor de pd^i , $i = 1, \dots, M$, es conocido y las variables I^i son independientes entre sí.

Ambos enfoques asumen la existencia de causas propias del deudor en el evento de impago y difieren en el mecanismo que rige la dependencia entre éstos⁶. El marco de independencia condicional resulta preponderante en la literatura y en la industria, es el empleado en este trabajo y se discute a continuación. Por su parte, el marco de contagio supone una familia menos estructurada de modelos, entre los que cabe destacar la discusión original de [103], el modelo seminal propuesto por [46] y la evidencia empírica reportada por [44] y cuestionada⁷ por [113]. [119] estudia el efecto de la concentración en esta clase de modelos y [101] discute la existencia de “contagio bueno”, donde el incumplimiento de un deudor, que compite con otro deudor en su mismo sector, refuerza la calidad crediticia de éste último.

La Figura 2.2 representa ambos enfoques, de los que cabe señalar, como muestra [74], que no resultan incompatibles: un modelo de independencia condicional puede ser completado con un mecanismo de contagio, de forma que la dependencia entre todos o parte de los deudores no desaparece con la realización de los factores comunes⁸.

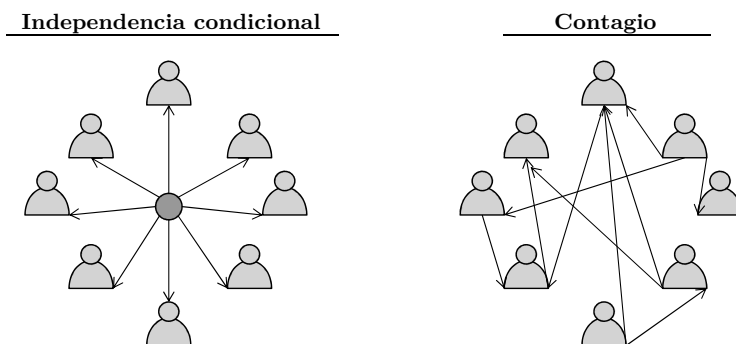


Figura 2.2: En un modelo de independencia condicional, los deudores son independientes una vez se realizan los factores que condicionan la probabilidad de impago. En un modelo de contagio, el impago inicial de un deudor puede propiciar el impago de otros deudores a través de una red de dependencias no necesariamente completa.

Los modelos de independencia condicional, también denominados *modelos de mixtu-*

⁶ [113] resume de forma elocuente ambos enfoques: si el impago de un préstamo o crédito equivaliese a caer enfermo, un modelo de contagio supondría un diagnóstico de gripe, mientras que un modelo de independencia condicional supondría un diagnóstico de contaminación ambiental.

⁷ Uno de los mayores problemas de los modelos de contagio es la identificación de la red de dependencias entre deudores a partir de datos observados.

⁸ En el caso de que éstos representen el estado de la economía, la estructura de contagio representa una fuente de dependencia adicional que persiste en cualquier momento del ciclo económico, como, por ejemplo, la que pueda haber entre una matriz y su filial.

ra, *modelos Bernoulli*, o *modelos de doble estocasticidad*, asumen que las probabilidades de impago de todos los deudores de la cartera se distribuyen idénticamente según una distribución F . Es decir, $pd^i = pd \sim F$, de forma que I^i puede representarse como una variable aleatoria Bernoulli, $Ber(pd)$, cuyo parámetro pd es aleatorio y donde las variables $I^{i,pd} = I^i / [F = pd]$ son independientes entre sí. Formalmente:

$$\begin{aligned} L^i &= Ber^i(F) e^i \\ L &= \sum_{i=1}^M L^i = \sum_{i=1}^M Ber^i(F) e^i \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde F es una variable aleatoria con soporte en el intervalo abierto unidad $(0, 1)$.

Cualquier monográfico sobre modelización del riesgo de crédito, y en particular los señalados en la introducción, revisa este marco. Entre los trabajos que discuten sus fundamentos, propiedades y ventajas destacan [68] y [82], mientras que [127] lo aplica al evento de migración.

Bajo esta formulación existen $M + 1$ fuentes de incertidumbre en L : F y las M variables Bernoulli condicionadas a la realización de F , que pueden interpretarse como M variables uniformes en el intervalo unidad independientes entre sí y de F . Ello permite diferenciar dos componentes en la variabilidad en L : la dada por F y, realizado un valor de F , $F = pd$, la dada por $L^{pd} = L / [F = pd]$.

La primera es la variabilidad, incertidumbre o riesgo *sistémico*, puesto que afecta a todos los deudores y no es diversificable, y la segunda la variabilidad, incertidumbre o riesgo *específico* o *idiosincrásico*, puesto que depende de cada deudor y sí es diversificable, como se muestra posteriormente. [91] discute en mayor detalle esta división entre fuentes de incertidumbre, que puede interpretarse también en términos de la identidad $V[L] = E[V[L/F]] + V[E[L/F]]$, donde $V[L/F]$ representa el riesgo específico, y $V[E[L/F]]$ el sistémico, que es, en consecuencia, la fuente de incertidumbre principal.

El modelo de pérdida descrito en (2.5) cuenta con buenas propiedades analíticas, como muestra la Proposición 2.1, cuya demostración puede verse en [22].

Proposición 2.1. *En el modelo de pérdida definido por la ecuación (2.5) se cumple que:*

1. $E[L] = E[F] \sum_{i=1}^M e^i$.
2. $V[L] = E[F] (1 - E[F]) \sum_{i=1}^M (e^i)^2$.
3. $Cov[L^i, L^k] = e^i e^k Cov[I^i, I^k] = e^i e^k V[F]$.
4. $Corr[L^i, L^k] = \frac{V[F]}{E[F] (1 - E[F])}$.
5. Si (i) $E^M = \sum_{i=1}^M e^i \uparrow \infty$ cuando $M \rightarrow \infty$, y (ii) $\sum_{M=1}^{\infty} \left(\frac{E^M}{\sum_{i=1}^M e^i} \right)^2 < \infty$ entonces $P\left(\lim_{M \rightarrow \infty} (L^M - E[L^M/F]) = 0\right) = 1$.

siendo $E[\cdot]$, $V[\cdot]$, $Cov[\cdot, \cdot]$ y $Corr[\cdot, \cdot]$ los operadores esperanza, varianza, covarianza y correlación.

■

Los cuatro primeros puntos de la proposición muestran la influencia de F en L dada la colección de exposiciones efectivas que forman la cartera: determina sus momentos y determina también la dependencia entre deudores.

El quinto punto presenta el concepto de *infinita granularidad*, según el cual si el número de deudores es suficientemente grande y el porcentaje de exposición efectiva total que representa cada uno suficientemente pequeño, L queda completamente determinada por F , en especial si $E = \sum_{i=1}^M e^i$ se normaliza a uno. Es decir, L conserva su carácter aleatorio pero sólo recoge el riesgo sistémico. Esta propiedad muestra el carácter diversificable del riesgo específico y, aunque en la práctica no puede cumplirse exactamente al tratarse de una propiedad asintótica, ya que M siempre es finito, resulta útil para estudiar L en términos de F . Cuando la cartera se aleja de la infinita granularidad aparece la *concentración*, en la que el número de deudores, M , no es suficientemente grande o alguno de ellos acumula un porcentaje significativo de la exposición efectiva total.

El principal inconveniente del modelo de pérdida descrito en (2.5) es su rigidez: F es la misma para todos los deudores de la cartera. Una posible generalización resulta de considerar una distribución F distinta para cada deudor, de forma que $L^i = Ber^i(F^i) e^i$, con $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^M)$ una distribución multivariante en $(0, 1)^M$. Esta aproximación da lugar a los modelos *orientados a deudores*, o modelos *de deudor*.

No obstante, para la clase de activos sujetos a riesgo de impago considerados en este trabajo, que son los créditos y préstamos concedidos por una entidad financiera dedicada a la banca comercial, este enfoque resulta inadecuado, tanto por el problema de complejidad (M es, en general, muy elevado) como por la dificultad que conlleva identificar una distribución F por deudor.

Los *modelos de cartera*, o modelos *orientados a unidades de riesgo*, suponen una alternativa a la rigidez de la expresión (2.5) y a la complejidad de los modelos de deudor. [107], [105], [98], [141] y [140], entre muchos otros, adoptan esta estructura, bajo la cual los deudores se agrupan en N *unidades de riesgo*, cada una de ellas vinculada a una distribución F^j , donde $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ forma una distribución multivariante con soporte en $(0, 1)^N$, con $N \ll M$. Es decir, cada deudor hereda el riesgo sistémico y la estructura de dependencia correspondiente a la unidad a la que pertenece.

Formalmente,

$$\begin{aligned} L^{ij} &= Ber^{ij}(F^j) e^{ij} \\ L^j &= \sum_{i=1}^{M^j} L^{ij} = \sum_{i=1}^{M^j} Ber^{ij}(F^j) e^{ij} \\ \tilde{L} &= \sum_{i=1}^N L^i = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M^j} Ber^{ij}(F^j) e^{ij} \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde \tilde{L} es la distribución de pérdidas agregada de la cartera, L^{ij} es la pérdida del deudor i de la unidad de riesgo j , y M^j es el número de deudores en la unidad j , $j = 1, \dots, N$. L^j , la pérdida⁹ de la unidad j , es una distribución discreta que toma 2^{M^j} valores posibles, aunque en la práctica se trata como continua con soporte $S^j = [0, E^j]$, siendo $E^j = \sum_{i=1}^{M^j} e^{ij}$ la exposición efectiva de la unidad j . El soporte de \tilde{L} es $\tilde{S} = [0, \tilde{E}]$, con $\tilde{E} = \sum_{j=1}^N E^j$ la exposición efectiva total de la cartera.

Este es el modelo de pérdida considerado a lo largo de este trabajo, y de él cabe señalar tres puntos.

Primero, en el caso particular de que cada deudor se encuadre en una unidad de riesgo distinta se obtiene un modelo de deudor, por lo que supone una extensión de éste.

Segundo, la Proposición 2.1 se cumple ahora a nivel marginal, sobre la distribución de pérdidas de cada unidad de riesgo. Además, se cumple que (i) la dependencia entre deudores pertenecientes a unidades distintas viene dada por:

$$Cov [L^{ij}, L^{ik}] = e^{ij} e^{ik} Cov [F^j, F^k] \quad (2.7)$$

$$Corr [L^{ij}, L^{ik}] = \frac{Cov [F^j, F^k]}{\sqrt{E [F^j] (1 - E [F^j])} \sqrt{E [F^k] (1 - E [F^k])}} \quad (2.8)$$

y (ii) la concentración puede interpretarse como un fenómeno originado por dos causas: el reparto de exposición efectiva total de la cartera, \tilde{E} , entre las unidades que la forman y, dada una unidad, el reparto de su exposición efectiva, E^j , entre sus M^j deudores. La primera se denomina habitualmente concentración *geográfica* o *sectorial*, dada la interpretación habitual que tienen las unidades de riesgo, y la segunda concentración *nominal*. [119] ofrece una completa revisión del problema de la concentración geográfica-sectorial y nominal.

Tercero, existen ahora $N + \sum_{j=1}^N M^j$ fuentes de incertidumbre que también pueden dividirse entre riesgo sistémico, dado por las variables F^j , $j = 1, \dots, N$, y riesgo específico, dado por las variables $Ber^{ij} (pd^j) e^{ij}$, $i = 1, \dots, M^j$, $j = 1, \dots, N$.

La medición del riesgo de incumplimiento de la cartera supone calcular, con base en el modelo de pérdida, algunos estadísticos, *medidas de riesgo* o *métricas de riesgo*¹⁰, de L .

⁹ Con carácter general, y siempre que el contexto no induzca a error, a lo largo de este trabajo se omite el superíndice j cuando la discusión se restringe a nivel unidad de riesgo o bien se trata un aspecto genérico. Así, por ejemplo, L hace referencia a la distribución de pérdidas a nivel unidad de riesgo en un contexto univariante o a cualquier distribución de pérdidas, individual o agregada, en una discusión genérica. En otros contextos, L^j denota la pérdida de la unidad j , \tilde{L} la distribución agregada y $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$ el vector de distribuciones de pérdida de la cartera. La misma convención aplica al resto de la notación.

¹⁰ Medida de riesgo, *risk measure*, es el término empleado habitualmente en la discusión formal y hace referencia al operador que asigna a la distribución de pérdidas el escalar de interés, mientras que métrica de riesgo, que es el término empleado mayoritariamente en este trabajo, hace referencia a algún estadístico de la variable pérdida.

Las métricas de riesgo más relevantes son (i) la media, denotada como *pérdida esperada*, y dada por $\mu = E[L]$, (ii) un percentil elevado de L , η , denotado como VaR, *Value at Risk*, correspondiente a la máxima pérdida potencial que la entidad esta dispuesta a cubrir, y (iii) la diferencia entre las dos magnitudes anteriores, la *pérdida inesperada*, $k = \eta - \mu$. Cabe señalar que η depende del *nivel de cobertura* u , puesto que¹¹ $\eta = \sup \{x/P(L < x) = u\}$, de forma que η es de hecho η_u . No obstante, en lo que sigue se omite en lo posible el subíndice u .

Tradicionalmente, la primera se considera un coste del negocio, a cubrir con provisiones, mientras que la última supone una pérdida no prevista que disminuye el capital de la entidad. Por ello, la pérdida inesperada se denota frecuentemente como *capital* y constituye la métrica principal. La Figura 2.3 muestra las tres métricas.

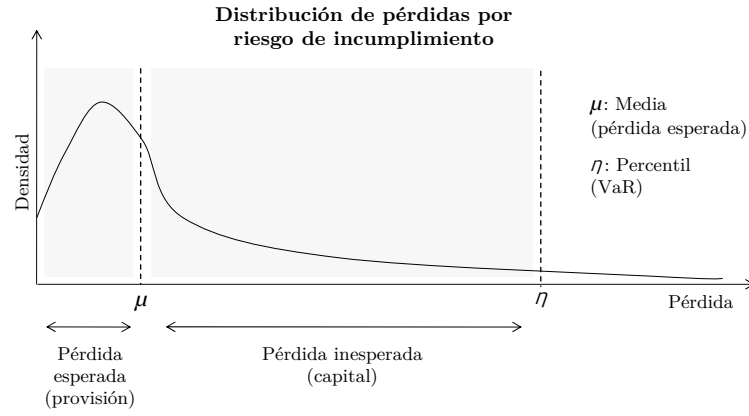


Figura 2.3: Representación clásica de las principales métricas de riesgo.

Cabe destacar tres aspectos sobre las métricas del riesgo.

Primero, pueden definirse a nivel cartera, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\eta}$ y \tilde{k} , o para cada unidad de riesgo que forma ésta, μ^j , η^j y k^j , lo que da lugar a métricas *agregadas* o *individuales*.

Segundo, el propio concepto de medida de riesgo ha suscitado un interés notable en la literatura. [152] revisa sus fundamentos, que parten de su consideración formal como un operador \mathcal{M} , $\mathcal{M} : L^2(S) \rightarrow \mathbb{R}$, que asigna a la distribución de pérdidas L un número real ξ , $\xi = \mathcal{M}(L)$. μ , η y k pueden presentarse en estos términos que, no obstante, resultan muy generales.

Para reflejar las condiciones que intuitivamente debe cumplir una medida de riesgo, [9] y [70] proponen cuatro *axiomas de coherencia*: (i) monotonía con respecto al tamaño¹² de la unidad o cartera, $A < B \Rightarrow \mathcal{M}(L^A) < \mathcal{M}(L^B)$, (ii), subaditividad, $\mathcal{M}(\tilde{L}) \leq \sum_{j=1}^N \mathcal{M}(L^j)$, (iii), homogeneidad positiva, $\mathcal{M}(\lambda L) = \lambda \mathcal{M}(L)$ para $\lambda > 0$, y (iv) invarianza por traslaciones, según la cual la inclusión en la cartera de deudores

¹¹ La consideración del supremo en la definición del VaR se debe al carácter discreto de L bajo el modelo (2.6). No obstante, en lo que sigue se asume por simplicidad su unicidad.

¹² En el caso del modelo dado en (2.6), respecto a la exposición efectiva total de la unidad o cartera, E^j y \tilde{E} respectivamente.

con pérdida L^{ij} determinista no cambia el valor de la métrica sobre el resto de la unidad o cartera, es decir, $\mathcal{M}(L + a) = \mathcal{M}(L) + a$ si $a \in \mathbb{R}$.

La segunda propiedad refleja el conocido *efecto diversificación*, según el cual el riesgo del total es siempre menor o igual que la suma de los riesgos asociados a cada parte. Sin embargo, y como ilustra [67] para el caso del riesgo de incumplimiento, el VaR no es una métrica de riesgo subaditiva y por tanto no es coherente¹³. Esta carencia ha propiciado la aparición de métricas de riesgo alternativas, entre las que destaca el *expected shortfall* (ES), también denominado *tail VaR*, definido como $\tau = E[L/L > \eta_v]$, con v no necesariamente igual a u . Es decir, el valor medio de los valores de L superiores a η_v . [138] discute los fundamentos y propiedades del ES, mientras que [162] ofrece una comparación con el VaR en los términos prácticos que resultan relevantes para una entidad financiera. Una generalización relevante del ES son las *medidas espectrales*, propuestas por [1], en las que se sustituye la media simple de los valores superiores a η_v por una media ponderada.

Aunque algunos trabajos, en especial de corte académico¹⁴, como [2], han promovido el uso del ES como medida de riesgo preferible al VaR, los casos donde se incumple la subaditividad de la segunda involucran carteras exóticas y en general artificiales, distintas de las que en la práctica conforman el activo de una entidad financiera tradicional, mientras que la estimación robusta del ES puede requerir un coste computacional elevado, como apunta [162]. Por ello, el VaR sigue siendo ampliamente utilizado en la industria y en el mundo académico. En este trabajo el VaR también es la medida de riesgo de referencia para el cálculo de la pérdida inesperada.

Tercero, la determinación del capital requiere definir el nivel de cobertura u , o, equivalentemente, el nivel de significación, $\alpha = 1 - u$, cumpliéndose que:

$$P(\tilde{L} < \tilde{\eta}_u) = P(\tilde{L} < \tilde{\eta}) = u = 1 - \alpha \quad (2.9)$$

o a nivel de unidad de riesgo:

$$P(L^j < \eta_u^j) = P(L^j < \eta^j) = u = 1 - \alpha \quad (2.10)$$

con $j = 1, \dots, N$.

En consecuencia, dado el modelo de pérdida, la cifra de capital de la cartera o de cada una de las unidades de riesgo depende del nivel de cobertura u , que en la práctica toma un valor elevado en el entorno de 0,999 ó 0,9997.

Algunos trabajos, como [64] y [58], entre otros, proponen o consideran un marco teórico en el que sustentar una elección óptima de u con base en parámetros como el

¹³ Nótese que, bajo estos criterios, k tampoco es una medida de riesgo coherente, por no serlo el VaR y por no cumplir la condición (iv).

¹⁴ El interés creciente por la modelización del riesgo de crédito en las entidades financieras ha hecho florecer una *literatura aplicada*, complementaria a la *literatura académica*, cuyo público objetivo son los *practitioners* y en la que se tratan problemas más cercanos a la gestión del riesgo de la entidad.

coste del capital, el coste de variar éste, el coste de la financiación o también restricciones normativas. No obstante, y como señala [31], en la práctica la decisión que toman los accionistas de la entidad para la determinación de u suele reducirse a escoger un rating de agencia¹⁵ para su cartera crediticia, lo que facilita la comunicación de la cifra de capital al mercado. Así, por ejemplo, si los accionistas desean un rating AA para su cartera crediticia y dicho rating implica una probabilidad de impago de 0,1 % según la agencia, u se toma igual a 0,999, de forma que η es el percentil¹⁶ 99,9 de L . En todo caso, a los efectos de este trabajo u es considerado como un parámetro dado.

2.3. El modelo de pérdida

2.3.1. Introducción

El modelo de pérdida constituye la herramienta principal con la que medir y analizar el riesgo de incumplimiento de la cartera de la entidad. Como señalan [104] y [3], el modelo de pérdida supone un paso más en la progresión experimentada en la medición y análisis del riesgo de crédito en las últimas décadas, en las que se ha pasado de un marco informal basado en criterio experto y análisis cualitativo, a un soporte teórico robusto y al empleo de herramientas matemáticas y estadísticas sofisticadas. De hecho, cabe esperar¹⁷ que la crisis financiera originada en 2008 conlleve una revisión del planteamiento analítico actual hacia mejores prácticas, así como el fortalecimiento del control de riesgos en las entidades y del papel supervisor.

Dejando a un lado la distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$, que es su componente principal y se discute en el apartado 2.4, a continuación se tratan brevemente algunas cuestiones relativas al modelo de pérdida, con especial atención al definido en (2.6).

¹⁵ Las agencias de calificación son entidades privadas con ánimo de lucro que otorgan a deudores mayoristas y soberanos calificaciones crediticias, o “ratings”, que forman parte de la información disponible por el mercado sobre la capacidad de pago de éstos. Su comportamiento antes y durante la Gran Recesión ha sido ampliamente cuestionado.

¹⁶ En lo que sigue el nivel de cobertura se expresa, con carácter general, en tanto por cien, por lo que, por ejemplo, los niveles 0,999 ó 0,9997 se indican como 99,9 y 99,97 respectivamente.

¹⁷ Aunque quizás con cierto escepticismo. En el artículo “Too clever by half” (*The Economist*) puede leerse: “*I used to sleep easy at night with my VaR model*” said Allen Wheat, chief executive of Credit Suisse First Boston (...). *In recent months, the “value-at-risk” model (...) has not worked for CSFB—or for the myriad other financial firms that used it. The same can be said of risk-management systems in general, and the people who ran them. Financial firms employed the best and brightest geeks to quantify and diversify their risks. But they have all (...) been mauled by the financial crisis. Now they and the world’s regulators are trying to find out what went wrong and to stop it happening again. (...) Was risk management flawed or were risk managers not powerful enough? Probably a bit of both. Some banks simply did not pay their risk managers enough or give them enough control. But in many cases the risk-management systems and those who ran them both failed (...). Quite simply, they relied too much on theory and not enough on market nous. Firms are trying to address these short-comings. Risk-management departments are being given more clout. Some big investment banks also want to rely less on models, and more on the market-savvy skills of those more versed in the trading arts. They are also asking the question: what if all our assumptions are wrong?*” El artículo data de noviembre de 1998, 10 años antes de la Gran Recesión.

2.3.2. Segmentación y estimación de la exposición efectiva

La segmentación de deudores en unidades de riesgo se basa habitualmente en criterios estadísticos y de riesgo, buscando homogeneidad en los deudores de una misma unidad de riesgo, heterogeneidad entre unidades y sentido económico en la definición de éstas.

En el caso del modelo de pérdida considerado, la segmentación de deudores responde a la distribución multivariante \mathbf{F} , por lo que las condiciones de homogeneidad y heterogeneidad lo son en términos de la calidad crediticia. Como muestra [42], la aproximación habitual al proceso de segmentación consiste en definir distintas capas consecutivas, cada una de ellas más granular que la anterior. Por ejemplo, segmentar primero por país, después, dado un país, por línea de negocio (hipotecas, consumo, tarjetas, empresas, etc.) y por último por calidad crediticia, dado un país y línea de negocio.

La segmentación por calidad crediticia es frecuente en la práctica y resulta útil para garantizar la homogeneidad entre deudores que conlleva compartir distribución F^j . Su implementación se aborda habitualmente a través de la puntuación ordenada que otorgan los modelos de *scoring* y *rating*¹⁸ con los que cuentan las entidades para la discriminación de los préstamos y créditos solventes y en ocasiones para la fijación del precio de la financiación¹⁹.

Los sistemas de calificación, y por extensión los de segmentación de los deudores de la cartera, se dividen, en función de las variables que los forman, en PiT, *Point in Time*, o TtC, *Through the Cycle*. [42] y [116] ofrecen una discusión detallada sobre sus diferencias, que radican en el tipo de variables que se emplean para discriminar el riesgo.

Así, en un enfoque PiT puro se emplean variables cíclicas, que varían con el ciclo económico, lo que permite una alta discriminación del riesgo de impago entre niveles de calificación pero también una fuerte migración de los deudores entre dichos niveles a lo largo del tiempo. La migración puede llegar a capturar gran parte del efecto del ciclo económico, de forma que la *tasa de incumplimiento*²⁰ por nivel de calificación apenas

¹⁸ Tradicionalmente, los modelos de scoring se emplean en el ámbito minorista, utilizan información recolectada en la concesión o el desempeño pasado del deudor, miden el evento de impago a nivel operación (y no deudor) y su resultado es una puntuación continua. Por su parte, los modelos de rating se emplean en el ámbito mayorista, utilizan también información de agencia, el evento de impago se mide a nivel deudor y su resultado suele ser una puntuación categórica ordenada. Trabajos iniciales como el de [4] para préstamos a empresas han dado lugar a una cantidad ingente de trabajos que exploran la capacidad discriminante de diversas variables en distintas poblaciones, como, por ejemplo, [99] para el caso español. [147] discute aspectos estadísticos y [25] trata el problema de los *deudores denegados*, aquellos que forman parte de la muestra de construcción del modelo pero que fueron rechazados, por lo que no se conoce su desempeño de pago.

¹⁹ Al menos, en teoría. [94] no encuentra, para una muestra de préstamos al consumo suecos (aceptados y denegados), evidencia de que la concesión responda a un procedimiento sofisticado de optimización de la rentabilidad y el riesgo con base en el scoring.

²⁰ O, equivalente, *tasa de impago*. Dicha tasa viene dada por el porcentaje de los deudores en riesgo al inicio de un periodo de tiempo que declaran un impago durante dicho periodo. Este concepto se

varíe a lo largo del tiempo. En un sistema TtC puro se emplean variables fundamentales del deudor estables a lo largo del ciclo económico, por lo que las migraciones de nivel de calificación son menores que en el caso PiT y la variación de la tasa de incumplimiento de cada nivel a lo largo del tiempo mayor. La Figura 2.4 representa ambos enfoques, mientras que [155] mide la influencia de cada fuente de variación, la de la migración y la de la tasa de impago.

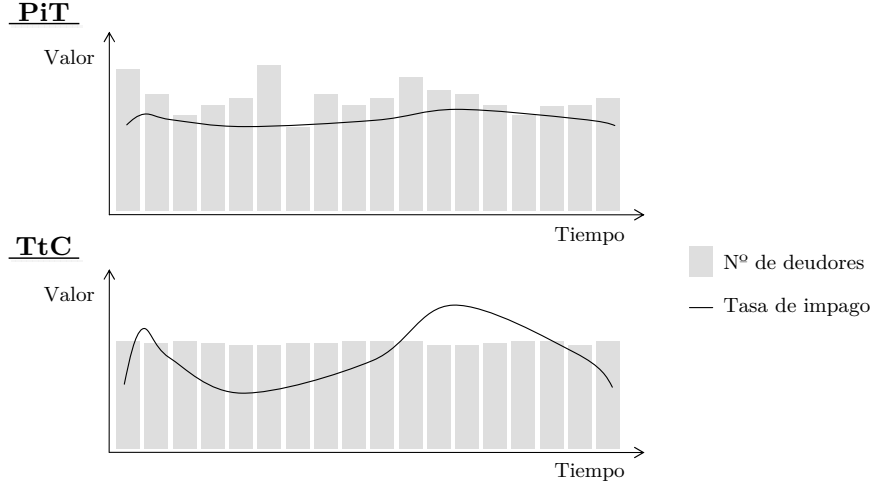


Figura 2.4: Representación de los esquemas PiT y TtC para un nivel de calificación. En el primero, la tasa de incumplimiento es estable puesto que la influencia del ciclo económico se captura a través de las migraciones, que hacen variar notablemente el número de deudores asignados a cada nivel. En un sistema TtC sucede lo contrario.

En este trabajo el tipo de sistema de calificación empleado no resulta relevante, puesto que el evento modelizado es el impago, no la migración, la cartera se asume constante durante el horizonte de cálculo y el modelo de pérdida considerado en (2.6) pivota sobre las unidades de riesgo de la cartera, no sobre los deudores que la forman.

Por último, cabe señalar también que la segmentación de la cartera en unidades de riesgo afecta significativamente a la medición del riesgo. Por un lado, se presta a criterios subjetivos que pueden sesgar las métricas de riesgo, incluso de forma premeditada, como apunta [32], o distorsionar el registro histórico de las mismas, como evidencia [23]. Por otro, y como discuten [51] y [93], una segmentación que no sea sensible al riesgo puede infraestimar éste, y en ocasiones el sentido económico y la robustez estadística pueden resultar difíciles de conciliar.

En lo que respecta a la estimación de e^{ij} , ésta se deriva de la estimación separada de ead^{ij} y s^{ij} . En ambos casos suele emplearse un modelo estadístico que se identifica a partir de información histórica propia de la entidad. En [63] se discuten ambos problemas de estimación y en [146] se profundiza en el caso de s^{ij} , que presenta, en general, mayor complejidad.

discute en mayor detalle en el apartado 2.4.5.

2.3.3. Proceso de cálculo

Bajo el modelo definido en (2.6), la pérdida esperada puede calcularse de forma inmediata:

$$\tilde{\mu} = E[\tilde{L}] = \sum_{j=1}^N E[L^j] = \sum_{j=1}^N \mu^j = \sum_{j=1}^N pd^j \sum_{i=1}^{M^j} e^{ij} \quad (2.11)$$

siendo $E[F^j] = pd^j$.

Sin embargo, el cálculo del VaR, η , resulta más complejo y pueden distinguirse en la literatura tres enfoques para su obtención.

Primero, la aproximación analítica, que bien por medio de una expresión cerrada, bien por la aplicación de un método de aproximación numérica, estima η de forma determinista. Entre otros, [69], [119], [48] y [135] discuten procedimientos de cálculo analíticos. Destaca entre ellos la denominada “aproximación por el punto de silla” (*saddlepoint approximation*, [84]), de la que [81] es un ejemplo de aplicación en el riesgo de incumplimiento.

Estos procedimientos ofrecen una estimación estable con un coste computacional moderado, pero suelen contar con hipótesis restrictivas sobre la cartera, en especial en lo relativo a la concentración. Como muestra la Proposición 2.1, bajo infinita granularidad el cálculo de η^j se reduce al cálculo del percentil u de F^j , lo que permite un cálculo determinista si ésta última es tratable analíticamente. Esta idea subyace a muchos de los trabajos anteriores. [35] propone una extensión de esta metodología para el cálculo del VaR agregado de la cartera.

Segundo, la simulación de Monte Carlo, que supone un procedimiento general aplicable siempre que $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ se pueda simular. [75] ofrece una completa revisión del procedimiento, que, en el caso del modelo²¹ (2.6), supone repetir G veces los siguientes pasos, donde G es el número total de simulaciones empleadas para caracterizar \tilde{L} :

1. Simular $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ para obtener un valor $\mathbf{pd} = (pd^1, \dots, pd^N)$.
2. Para cada unidad j , simular M^j variables Bernoulli de parámetro pd^j para obtener un valor l^j de $L^j / [F^j = pd^j] = \sum_{i=1}^{M^j} Ber(pd^j) e^{ij}$.
3. Obtener un valor de $\tilde{L}^{pd} = \tilde{L} / [F = pd]$, \tilde{l} , como $\tilde{l} = \sum_{j=1}^N l^j$.

Una vez obtenidos los G valores, $\tilde{\eta}$ puede estimarse²² como el correspondiente u -percentil de $\{\tilde{l}^1, \dots, \tilde{l}^G\}$, empleando para ello el estimador clásico o bien alguno de

²¹ La simulación de Monte Carlo puede emplearse asimismo en modelos que consideren como aleatoria la exposición al riesgo o incorporen mecanismos de contagio.

²² De forma equivalente puede estimarse el VaR a nivel unidad de riesgo, η^j , sobre el conjunto $\{l^{j,1}, \dots, l^{j,G}\}$.

los que proporciona la teoría de valores extremos, como el estimador de Hill²³.

La simulación Monte Carlo resulta versátil y no es compleja de implementar, lo que la ha convertido en el método de cálculo preponderante. No obstante, la estimación de η está sujeta a error de realización, lo que puede requerir de un valor de G elevado para garantizar una estimación precisa. Ello conlleva un coste computacional notable, en especial si la simulación de F es compleja, existen muchas unidades de riesgo o muchos deudores por unidad. Ello ha conducido a la consideración de procedimientos de simulación eficiente, como los que se proponen en el Capítulo 6 para el riesgo sistémico o los que se repasan en el Apéndice A para el riesgo específico. Sobre éste último cabe señalar que, aunque su simulación carece de dificultad, puesto que se reduce a generar $\tilde{M} = \sum_{j=1}^N M^j$ variables uniformes en el intervalo unidad en cada ejecución del esquema anterior, supone la fuente principal de coste computacional.

Tercero, la metodología propuesta por [30], que, sin circunscribirse al marco de independencia condicional, resulta relevante por suponer una aproximación no paramétrica que es al mismo tiempo modelo de pérdida y procedimiento de cálculo. Es el denominado *método de remuestreo*, consistente en muestrear iterativamente deudores de una población histórica para la que se ha observado el evento de impago, de forma que cada muestra supone una realización de L .

La población se estructura por unidades de riesgo y, en ocasiones, por otros ejes como el temporal para garantizar la homogeneidad. La muestra puede sesgarse para acentuar algún rasgo de interés. Este método ofrece la ventaja de capturar implícitamente la estructura de dependencia sin necesidad de explicitar un modelo y los inconvenientes habituales de la simulación histórica: la falta de estructura reduce su sentido económico y la capacidad de análisis, y los resultados están fuertemente condicionados a la muestra observada. [93], [31], [139] y [28], entre otros, aplican variantes de esta metodología para la obtención de la distribución de pérdidas.

2.3.4. Usos y aplicaciones

Además del cálculo de las métricas de riesgo, el modelo de pérdida puede ser empleado en otros procesos de la entidad, como la fijación del precio de la financiación o la medición de la rentabilidad ajustada al riesgo.

En lo que respecta a la primera, el modelo de pérdida, y en especial los valores pd^j y e^{ij} , pueden ser empleados para medir de forma precisa la pérdida esperada e inesperada del préstamo o crédito y determinar el margen o *spread* necesario para cubrir éstas, *spread* en consecuencia *ajustado al riesgo*. [156] y [51], entre otros, proponen metodologías para determinar dicho *spread* con base en el riesgo del deudor y [136] discute las distorsiones que la normativa bancaria puede generar en un sistema de *pricing* ajustado al riesgo. En todo caso, la consideración del riesgo en la fijación del precio de la financiación se plantea en la práctica con cautela, puesto que el propio *spread*

²³ Véase [59] para una introducción a la medición de eventos extremos en el ámbito financiero, entre los que se encuentra el VaR, puesto que u es, en general, muy próximo a 1.

influye en la probabilidad de impago y puede en consecuencia conducir a problemas de selección adversa o a espirales de aumento del precio de la financiación necesario para cubrir el riesgo²⁴. Como señala [51], la necesidad de ofrecer un spread demasiado alto para cubrir el riesgo de un deudor es indicativo de que el préstamo o crédito no debe ser concedido²⁵.

La medición de la rentabilidad ajustada al riesgo está relacionada con el punto anterior y permite conocer el desempeño de la cartera, unidad de riesgo o incluso activo en términos de la relación entre el valor añadido y el riesgo generado, medido éste en términos del capital consumido o de su coste. Como discute [150], el RORAC (*Return On Risk Adjusted Capital*) y el EVA (*Economic Value Added*) se emplean habitualmente para este fin.

Otros usos del modelo de pérdida incluyen (i) la planificación de capital, *capital planning*, destinada a estudiar el consumo de capital y provisiones futuros en función de la coyuntura económica futura y del plan de negocio, y (ii) la gestión activa del capital, *credit portfolio management*, cuyo fin es optimizar el consumo de capital de la entidad según su perfil de riesgo a partir de variaciones estratégicas en la composición de la cartera²⁶.

2.3.5. Capital diversificado

El capital individual, k^j , depende exclusivamente de la distribución de pérdidas de la unidad de riesgo, L^j , por lo que no recoge la dependencia de ésta con las restantes unidades de la cartera y, en particular, el efecto diversificación citado en el apartado 2.2. Por ello, las entidades emplean en algunas aplicaciones una cifra alternativa, el *capital diversificado*, $k^{d,j}$. Este capital sí recoge el efecto diversificación que se produce al integrar distintas unidades dentro de la cartera y cumple que $\sum_{j=1}^N k^{d,j} = \tilde{k}$. La medición de dicha diversificación se efectúa a través de los *ratios de diversificación*:

$$\lambda^j = 1 - \frac{k^j}{k^{d,j}} \quad (2.12)$$

a nivel unidad y

$$\tilde{\lambda} = 1 - \frac{\tilde{k}}{\sum_{j=1}^N k^j} \quad (2.13)$$

²⁴ Un fenómeno similar al discutido originalmente por [29] para la deuda soberana y los *self-fulfilling panics*.

²⁵ Nótese que ello es consecuencia de que deudor y cliente son el mismo agente. Como contraejemplo puede considerarse el caso del seguro de crédito (*trade credit insurance*, [71]) donde la aseguradora puede, en principio, cobrar al segundo cualquier riesgo de impago proveniente del primero, sin por ello alterar su capacidad de pago.

²⁶ [8], entre otros, aborda este problema, que puede interpretarse como una extensión al ámbito del consumo de capital de la conocida optimización de carteras.

a nivel agregado. Los capitales diversificados $k^{d,j}$ se obtienen a través de un *método de reparto del capital*, que distribuye el capital agregado, \tilde{k} , entre las unidades de riesgo que forman la cartera, de manera que $k^{d,j} = \hat{r}^j k^{d,j}$, siendo $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}^1, \dots, \hat{r}^N)$ el *vector de pesos* del reparto. En el Apéndice B se revisa en mayor detalle el proceso de reparto de capital.

Cabe destacar que los capitales diversificados y los ratios de diversificación no son relevantes sólo para el análisis del riesgo de incumplimiento, cuánto riesgo genera y cuánto diversifica cada unidad de la cartera, sino también, como señala [163], para la gestión interna de la entidad en aspectos como la evaluación del desempeño, la política retributiva o la medición del valor creado para el accionista.

2.3.6. Integración con otras herramientas

El modelo de pérdida por riesgo de incumplimiento puede integrarse con otras herramientas cuantitativas destinadas a medir o analizar los riesgos de la entidad, como el análisis de escenarios o los modelos de pérdida para otros riesgos.

El análisis de escenarios persigue conocer la sensibilidad de las métricas de riesgo, en especial la pérdida esperada, ante cambios en la estructura de la cartera o, sobre todo, la coyuntura económica. Cuando el análisis se centra en escenarios desfavorables con el fin de estudiar la robustez y solvencia de la entidad se denomina *stress test*, si bien con frecuencia ambos términos se emplean indistintamente. [149], entre otros, discute distintos aspectos de esta herramienta de análisis.

Por su parte, la integración del modelo de pérdida por riesgo de incumplimiento con los modelos de pérdida por otros riesgos es necesaria para obtener una medición del riesgo global que enfrenta la entidad. Entre dichos riesgos destacan los de mercado, tipo de interés, operacional o negocio. Esta integración requiere establecer la dependencia entre dichos riesgos, dependencia que (i) resulta notable en algunos casos, como en el del riesgo de incumplimiento y de mercado, como apunta [97], y (ii) puede resultar compleja de modelizar dada su heterogeneidad, como discute [108]. [16] examina la práctica de la industria en la agregación de riesgos y [12], entre otros, plantea un modelo de pérdida en el que, además de riesgo de crédito, se considera riesgo de mercado, tipo de cambio y tipo de interés.

2.3.7. Relación con el marco regulatorio

El desarrollo precedente, incluido el modelo de pérdida definido en (2.6), se enmarcan en una perspectiva *económica* de la medición del riesgo, donde son los accionistas de la entidad los que definen el nivel de cobertura u y el modelo de distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ en función de su apetito al riesgo, su experiencia histórica y el hecho de que mayor capital conlleva mayor solvencia y en consecuencia menores costes de financiación, pero también menor rentabilidad, dado que, habitualmente, el capital es

una fuente de financiación más costosa que la deuda.

La perspectiva alternativa es la *regulatoria*, donde los requerimientos de capital y otras decisiones sobre el perfil de riesgo de la entidad son definidos, coordinados y revisados por los organismos supervisores nacionales o supranacionales.

Ambas perspectivas requieren de un modelo de pérdida y conllevan, en particular, el cálculo de una cifra de capital, que será capital económico en el primer caso y capital regulatorio en el segundo. Desde Basilea II, ambas métricas conviven en la gestión del riesgo de la entidad. Desde distintas perspectivas, trabajos como [31], [93], [100], [28], [64] y [58] abordan sus diferencias, que, en términos generales, pueden resumirse en que responden a un *trade-off* distinto: entre solvencia y rentabilidad de la entidad en el caso económico, entre estabilidad y eficiencia del sistema financiero en el caso regulatorio.

Aunque la justificación de un marco regulatorio en una economía de libre mercado excede el alcance de esta introducción, ésta se relaciona con la discusión planteada en [50], donde se muestra la conveniencia de garantizar los depósitos de las entidades bancarias y la necesidad de establecer, como contraprestación, una supervisión normativa que evite el riesgo moral, mitigue el coste de la cobertura para el contribuyente y promueva unos requerimientos de capital homogéneos y objetivos.

Cabe señalar que los modelos de pérdida también resultan de interés para los organismos supervisores, que pueden emplearlos para medir el riesgo agregado del sistema, habitualmente añadiendo a la formulación de independencia condicional un mecanismo de contagio entre entidades financieras. Es el denominado *riesgo sistémico*, del que [92] supone un ejemplo de su modelización en términos de probabilidades y correlaciones de incumplimiento.

2.3.8. Influencia del ciclo económico

Existe una enorme literatura sobre la influencia del ciclo económico en el riesgo de impago. Entre otros muchos, cabe citar la evidencia positiva encontrada por [107], [104] y [24], la revisión de la literatura que presenta [65], el análisis de [144] sobre el efecto que induce en la política de concesión de las entidades (*disaster myopia*) y el marco teórico propuesto por [86] para entender cómo modifican las entidades su estructura de capital ante variaciones en el entorno económico.

Bajo el modelo de pérdida considerado en (2.6), la influencia del ciclo económico sobre cada unidad de la cartera se articula a través de la distribución F^j , $j = 1, \dots, N$, en especial a través de su valor esperado $pd^j = E[F^j]$, según se discute en el apartado 2.4.

El ciclo económico puede inducir *ciclicidad* sobre las métricas de riesgo, con aumentos de pérdida esperada y capital en las épocas de recesión y disminución en épocas de expansión como consecuencia de la variación en el perfil de riesgo de los deudores. La ciclicidad puede, de hecho, convertirse en *prociclicidad*: el aumento (disminución) de la pérdida esperada y del capital encarece y restringe (abarata y promueve) el crédito, lo

que acentúa el ciclo económico. [52] y [83] discuten este fenómeno en términos de los requerimientos regulatorios y concluyen, con matices, que los requerimientos mínimos fijados por Basilea son, en contra de su objetivo inicial, procíclicos. La ciclicidad y prociclicidad del negocio bancario, y en particular del riesgo de incumplimiento, han atraído una atención notable a raíz de la crisis financiera global desencadenada en 2008.

2.3.9. Modelos de pérdida en la industria

El interés de las entidades por contar con una medición interna de su riesgo de crédito, así como la obligación normativa de obtener un cifra económica de capital, han promovido el desarrollo e implantación en las entidades de modelos de pérdida propios similares al planteado en (2.6), con la posible consideración de aleatoriedad en EAD y LGD. [14] revisa las aproximaciones existentes en la industria en aspectos como la elección de la medida de riesgo, la estructura de dependencia entre deudores o la gobernanza del modelo.

Además de los modelos desarrollados internamente por las entidades, algunos proveedores han sacado al mercado soluciones comerciales, entre las que cabe destacar *Portfolio Manager* (KMV, [40]), *CreditMetrics* (JP Morgan, [85]), *CreditRisk+* (Credit Suisse First Boston, [160]) y *Credit Portfolio View* (McKinsey, [161]). [41] ofrece una completa revisión de todos ellos, [68] y [80] discuten sus similitudes y las condiciones bajo las que responden a un planteamiento común y [17] aborda un análisis crítico desde el punto de vista supervisor. Cabe señalar, como apunta [3], que estos modelos conllevan en la práctica elevados y rígidos requerimientos de información, lo que cuestiona su utilidad, sobre todo en carteras minoristas. La Tabla 2.1, sustentada en las comparaciones de [22] y [47], resume sus principales características.

2.4. La distribución de probabilidad de incumplimiento

2.4.1. Estructura de dependencia entre deudores

La dependencia entre deudores supone el principal reto en la modelización del riesgo de incumplimiento y su estudio ha dado lugar a una notable cantidad de trabajos, entre los que se encuentran [118], que supone una contribución central, y [61], que rebate algunas de las falacias más comunes, así como las referencias sobre el marco de independencia condicional citadas a lo largo del capítulo.

<i>Eje</i>	<i>Portfolio Manager</i>	<i>CreditMetrics</i>	<i>CreditRisk+</i>	<i>Credit Portfolio View</i>
Evento de riesgo	Migración o incumplimiento	Migración	Incumplimiento	Migración o incumplimiento
Factores de riesgo	Series de cotizaciones	Factores no observables (distribución Normal)	Factores no observables (distribución Gamma)	Variables macro
Estructura de dependencia	Modelo factorial (<i>Asset Value Factor Model</i>)	Modelo factorial (<i>Equity Value Factor Model</i>)	Independencia condicional a los factores no observables	Independencia condicional a los factores macro
Tratamiento LGD	Aleatoria con distribución Beta	Aleatoria con distribución Beta	Determinista, constante por unidad de riesgo	Aleatoria, calibrada empíricamente
Método de cálculo	Simulación	Simulación	Analítico	Simulación

Tabla 2.1: *Comparativa de las principales soluciones comerciales.*

Bajo el modelo de pérdida definido en (2.6), la dependencia entre las $\tilde{M} = \sum_{j=1}^N M^j$ variables de incumplimiento I^{ij} viene dada por la distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$, que constituye el riesgo sistémico de la cartera. Si U^{ij} es la variable uniforme en el intervalo unidad que representa el riesgo específico del deudor i de la unidad j , entonces:

$$I^{ij} = 1 \Leftrightarrow U^{ij} < F^j \Leftrightarrow U^{ij} - F^j < 0 \Leftrightarrow CWI^{ij} < 0 \quad (2.14)$$

donde CWI^{ij} es el denominado *Credit Worthiness Index* del deudor i de la unidad j , magnitud que puede interpretarse como la variable aleatoria “capacidad de pago”, ya que integra el riesgo específico y sistémico que afecta al deudor y que determina su incumplimiento.

Habitualmente, la expresión anterior se formula en términos²⁷ de $N^{-1}(\cdot)$, la inversa de la función de distribución Normal estándar, de forma que:

$$\begin{aligned}
I^{ij} = 1 &\Leftrightarrow U^{ij} < F^j \\
&\Leftrightarrow N^{-1}(U^{ij}) < N^{-1}(F^j) \\
&\Leftrightarrow N^{-1}(U^{ij}) - N^{-1}(F^j) < 0 \\
&\Leftrightarrow CWI^{ij} < 0
\end{aligned} \quad (2.15)$$

donde se ha reformulado CWI^{ij} como $CWI^{ij} = N^{-1}(U^{ij}) - N^{-1}(F^j)$.

²⁷ Ello se debe a que el concepto está estrechamente relacionado con el modelo de función índice probit, como se discute en el Apéndice C.

Se cumple entonces que:

$$\begin{aligned} \text{Corr} [CWI^{ij}, CWI^{lj}] &= \frac{\text{Cov} [N^{-1} (U^{ij}) - N^{-1} (F^j), N^{-1} (U^{lj}) - N^{-1} (F^j)]}{S [N^{-1} (U^{ij}) - N^{-1} (F^j)] S [N^{-1} (U^{lj}) - N^{-1} (F^j)]} \\ &= \frac{V [N^{-1} (F^j)]}{1 + V [N^{-1} (F^j)]} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr} [CWI^{ij}, CWI^{lk}] &= \frac{\text{Cov} [N^{-1} (U^{ij}) - N^{-1} (F^j), N^{-1} (U^{lk}) - N^{-1} (F^k)]}{S [N^{-1} (U^{ij}) - N^{-1} (F^j)] S [N^{-1} (U^{lk}) - N^{-1} (F^k)]} \\ &= \frac{\text{Cov} [N^{-1} (F^j), N^{-1} (F^k)]}{\sqrt{1 + V [N^{-1} (F^j)]} \sqrt{1 + V [N^{-1} (F^k)]}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La primera ecuación define la *correlación de activos intraunidad*, mientras que la segunda define la *correlación de activos interunidad*. En la práctica, la segunda se emplea con mucha menor frecuencia, por lo que la primera se nombra simplemente como *correlación de activos*, y se denota por ρ^j , $j = 1, \dots, N$. La correlación de activos se emplea frecuentemente como medida del grado de dependencia entre deudores de una misma unidad y es una función monótona creciente de la varianza de $N^{-1} (F^j)$, y por ello de la propia varianza de F^j .

Por último, cabe destacar, como muestra [22], que la distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ induce una *cópula*²⁸ sobre las \tilde{M} distribuciones marginales CWI^{ij} . Puesto que $I^{ij} = 1 \Leftrightarrow CWI^{ij} < 0$, dicha cópula determina también la estructura de dependencia entre las variables de incumplimiento de todos los deudores.

2.4.2. Representación del entorno económico

Como se ha señalado en el apartado 2.3.8, el riesgo de incumplimiento tiene un fuerte carácter cíclico que hace crecer la PD de los deudores en épocas de recesión y decrecer en épocas de expansión. Bajo el modelo (2.6), la PD del deudor i de la unidad j viene dada por $pd^{ij} = E [I^{ij}] = E [F^j]$, por lo que la elección de la distribución \mathbf{F} supone también la elección del “entorno económico” para el que se calculan las métricas de riesgo individuales y agregada. Así, por ejemplo, la elección de una distribución marginal F^j con un valor esperado elevado puede representar un entorno recesivo, y una mayor varianza indicar una mayor incertidumbre sobre el evento de impago.

Si la entidad opta por recoger en \mathbf{F} el estado del ciclo económico existente en cada momento obtiene una medición más sensible al riesgo y vinculada a un entorno económico concreto. A cambio, puede incurrir en mayores costes financieros derivados del cambio periódico de la estructura de capital, lo que además incrementa su vulnerabilidad ante *shocks* en el mercado de capitales. Sensibilidad al riesgo y estabilidad

²⁸ Véase [60] para una introducción a las cópulas y su aplicación en la modelización del riesgo de incumplimiento.

son en consecuencia difíciles de alcanzar al mismo tiempo y la segunda puede resultar conveniente también desde una perspectiva económica²⁹.

La obtención de métricas de riesgo estables ha conducido a la consideración, tanto en el caso regulatorio como en el económico, de una distribución \mathbf{F} de “ciclo económico completo”, donde el entrecomillado, empleado en adelante, resalta el carácter informal de la expresión, que no constituye una definición precisa y que puede interpretarse como una distribución de PD que pondera el intervalo unidad según la frecuencia histórica observada para la tasa de impago de cada unidad a lo largo de un intervalo de tiempo suficientemente amplio. Este intervalo debe contener épocas expansivas y contractivas en una proporción similar a la que cabría esperar en un ciclo económico estándar.

Cabe señalar dos puntos sobre la adopción de una distribución \mathbf{F} de “ciclo económico completo”. Por un lado, la ciclicidad no se mitiga del todo, puesto que la migración de deudores entre unidades siempre cuenta, en general, con algún componente cíclico, aún cuando el sistema de calificación persiga un esquema TtC. Por otro, el concepto de “ciclo económico completo” cuenta, como se discute en el Capítulo 3, con significativas carencias además de la inexactitud del término o la dificultad para identificar un ciclo económico, en especial en el caso de no estacionariedad de la tasa de incumplimiento de la entidad.

Ambos enfoques, el de escenarios puntuales condicionados a una situación económica concreta, real o ficticia, y el de escenarios “medios” de un “ciclo económico completo”, suponen los entornos económicos habitualmente considerados en la práctica para la distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$.

2.4.3. Horizonte de cálculo

El horizonte de cálculo, Q , se ha asumido fijo en el desarrollo precedente. No obstante, su elección forma parte de las decisiones que debe tomar la entidad en función de su perfil de riesgo. Como discuten [31], [149] y [57], desde una perspectiva económica el horizonte de cálculo debería reflejar el tiempo de respuesta que la entidad estima que necesita para recobrase de un shock adverso que deteriore su activo, en este caso, los préstamos y créditos concedidos. Involucra, por tanto, su capacidad para restaurar la solvencia deseada a través de la recapitalización o la liquidación de parte de su activo. En la práctica, sin embargo, la consideración del horizonte anual supone un convenio ampliamente aceptado, también a nivel regulatorio, que, no obstante, puede resultar insuficiente ante una desaceleración notable y persistente de la actividad económica.

Distintos horizontes de cálculo requieren diferentes distribuciones F , y un caso de especial interés se da cuando $Q > 1$, en cuyo caso se aborda una medición *multiperiodo*, lo que requiere modelizar las distribuciones F_1^j, \dots, F_Q^j , correspondientes a la probabili-

²⁹ De hecho, y como apunta [52], puede llegar a resultar óptimo para la entidad, en términos económicos, contar con un “colchón de capital” (*capital buffer*) sobre el requerimiento mínimo regulatorio, aún cuando el capital suponga una fuente de financiación costosa, con el fin de suavizar la ciclicidad de dicho requerimiento y con ello mitigar el coste de ajuste (*capital adjustment cost*).

dad de impago de la unidad de riesgo en cada uno de los Q periodos que conforman el horizonte. Estas distribuciones se integran a través de la función \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad (0 \ 1)^Q &\rightarrow (0 \ 1) \\ (x_1, \dots, x_Q) &\rightarrow 1 - \prod_{i=1}^Q (1 - x_i) \end{aligned} \quad (2.18)$$

\mathcal{F} es el complementario a 1 de la función de supervivencia en tiempo discreto³⁰, de manera que $F^j = \mathcal{F}(F_1^j, \dots, F_Q^j)$.

También pueden calcularse métricas de riesgo para *horizontes consecutivos*, lo que implica el cálculo de las distribuciones de pérdidas vinculadas a los intervalos $t + 1$ a $t + Q$, $t + Q + 1$ a $t + 2Q$, etcétera. La longitud de los horizontes consecutivos puede ser distinta, aunque generalmente en todos ellos es igual a Q , y las métricas así obtenidas se suelen emplear en ejercicios de planificación de capital. Pueden incorporarse, además, mecanismos de migración de los deudores a nuevas unidades de riesgo al final de cada horizonte de cálculo, lo que resulta de interés bajo una segmentación PiT. En tal caso, un mismo deudor puede estar sujeto a distintas distribuciones de PD en cada horizonte según va migrando de una unidad de riesgo a otra a lo largo de los mismos.

Aunque relacionados, la medición multiperiodo y el cálculo a horizontes consecutivos obedecen a conceptos distintos. La primera supone modelizar la distribución F para el conjunto del horizonte a partir de las distribuciones de PD correspondientes a cada uno de los periodos que lo forman, considerando en todo caso un único horizonte de cálculo y en consecuencia obteniendo un único conjunto de métricas de riesgo. Por su parte, el cálculo a horizontes consecutivos conduce a varias distribuciones de pérdidas y por tanto a varios conjuntos de métricas de riesgo. Así, por ejemplo, en el primer caso el riesgo específico de cada deudor se simula G veces, mientras que en el segundo se simula GC veces, siendo G el número de simulaciones de Monte Carlo consideradas por horizonte y C el número de horizontes consecutivos.

2.4.4. Modelos de distribución

2.4.4.1. Visión general

No existe una teoría unificada sobre los modelos de distribución de PD estocástica, sino que éstos forman un grupo diverso para el que resulta difícil establecer una taxonomía o abordar un análisis comparado. No obstante, sí es posible distinguir algunos patrones generales e identificar algunas familias de modelos como los que se discuten a continuación.

Habitualmente, el ajuste de una distribución F parte de la matriz de datos obser-

³⁰ Véase [148] para una introducción al análisis de supervivencia en tiempo discreto.

vados internos Λ^h ,

$$\Lambda^h = \begin{pmatrix} \dot{h}_{ti}^1 & \dot{h}_{ti}^2 & \cdots & \dot{h}_{ti}^N \\ \dot{h}_{ti+1}^1 & \dot{h}_{ti+1}^2 & \cdots & \dot{h}_{ti+1}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{h}_{tf-1}^1 & \dot{h}_{tf-1}^2 & \cdots & \dot{h}_{tf-1}^N \\ \dot{h}_{tf}^1 & \dot{h}_{tf}^2 & \cdots & \dot{h}_{tf}^N \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde \dot{h}_{ti+s}^j es la realización de h_t^j en el periodo $ti + s$, siendo h_t^j el *hazard rate*, HR, de la unidad j en el periodo observado t .

El término HR proviene del análisis de supervivencia y representa la *intensidad* del evento de impago, lo que en tiempo discreto se corresponde con la probabilidad de incumplimiento asociada a la unidad de riesgo. En lo que sigue se emplea, por ser más rigurosa, la denominación HR en vez de la de tasa de incumplimiento o de impago. Su cálculo se discute al final del capítulo. Por su parte, ti y tf son los periodos inicial y final de la *ventana de observación*, empleada para identificar el modelo.

Como se ha discutido anteriormente, la entidad escoge la distribución \mathbf{F} con el fin de representar un determinado escenario económico. En el caso condicional esto se logra mediante la definición de un escenario concreto que condiciona la distribución de PD, mientras que en el caso de “ciclo económico completo” suele considerarse una *ventana de cálculo*, que viene dada por el par $[tl\ tu]$, que son sus límites inferior y superior, y que concreta la clase de escenario económico representado en términos del observado en las series de HR o en variables indicadoras de coyuntura.

Es decir, la entidad identifica una versión general del modelo con las series de HR sobre la ventana de observación, versión general que se “acondiciona” (considerando información adicional, añadiendo alguna restricción, perturbando algún parámetro, considerando algún escenario condicionante, etc.) para responder a un entorno económico concreto o bien a la evolución observada por las N series de HR de la cartera en el periodo de tiempo $[tl\ tu]$, lo que vincula \mathbf{F} con el escenario económico acaecido en dicho intervalo.

Cabe subrayar dos aspectos sobre la ventana de cálculo.

Por un lado, en algunas ocasiones ambas ventanas coinciden, por lo que:

$$\Lambda^h = \begin{pmatrix} \dot{h}_{tl}^1 & \dot{h}_{tl}^2 & \cdots & \dot{h}_{tl}^N \\ \dot{h}_{tl+1}^1 & \dot{h}_{tl+1}^2 & \cdots & \dot{h}_{tl+1}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{h}_{tu-1}^1 & \dot{h}_{tu-1}^2 & \cdots & \dot{h}_{tu-1}^N \\ \dot{h}_{tu}^1 & \dot{h}_{tu}^2 & \cdots & \dot{h}_{tu}^N \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Por otro, es la ventana de cálculo la que finalmente delimita la distribución \mathbf{F} . En particular, la PD esperada de cada unidad, $E[F^j] = pd^j$, está, en general, próxima a la media de h_t^j en el intervalo $[tl\ tu]$, y en el caso de una medición del riesgo de incumplimiento “de ciclo completo”, son los límites tl y tu los que delimitan dicho ciclo

en términos del HR.

La literatura clasifica los modelos de distribución \mathbf{F} , de forma informal, entre (i) modelos *estáticos*, en los que se propone directamente una distribución de probabilidad, habitualmente paramétrica, que no contempla la evolución temporal del HR, y (ii) modelos *dinámicos*, en los que se reconoce explícitamente el carácter de proceso estocástico del HR y se emplea la relación dinámica que vincula información pasada y HR futuros.

[26], [104], [128] y [20], entre otros, revisan con distinta profundidad ambas perspectivas, que se discuten brevemente en los apartados 2.4.4.2 y 2.4.4.3. Antes, pueden destacarse dos aspectos de interés sobre la modelización de la distribución \mathbf{F} , tanto en la aproximación estática como en la dinámica.

Por un lado, el protagonismo que han adquirido las formulaciones factoriales para tratar la estructura de dependencia entre distribuciones F^j cuando N es elevado. En el caso estático este enfoque supone expresar $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ en términos de un número N^* , $N^* \ll N$, de factores no observables, o *latentes*, $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^{N^*})$, de forma que $F^j = \psi^j(\Phi^1, \dots, \Phi^{N^*})$ para alguna función ψ^j , habitualmente lineal general. Por su parte, en el caso dinámico la adopción de una estructura factorial suele involucrar el ajuste al vector $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ de un *modelo factorial dinámico*³¹.

Por otro lado, el hecho de que la identificación de \mathbf{F} está sujeta a *riesgo de modelo*: el riesgo de que las métricas de riesgo se estimen incorrectamente como consecuencia de la adopción de una distribución de PD inadecuada o el empleo de un proceso de cálculo deficiente. [115] trata esta fuente de incertidumbre en el caso del riesgo de incumplimiento.

2.4.4.2. Aproximación estática

La aproximación estática está fuertemente vinculada a la medición de “ciclo económico completo”. Cuando $Q = 1$, la aproximación estática consiste en ajustar a la matriz de datos Λ^h una distribución N -variante con soporte en $(0\ 1)^N$, habitualmente paramétrica.

Aunque pueden considerarse diversas formulaciones alternativas, como las que repasa [145], el *modelo de Vasicek*, propuesto por [157], supone el modelo predominante. Éste se inspira en el desarrollo original de [126] y ha sido estudiado y aplicado, con matices o variaciones, en infinidad de trabajos, como [51], [117], [89] y [20], entre otros muchos. Además, subyace al modelo regulatorio desde Basilea II y es ampliamente utilizado en los modelos internos de las entidades, como señala [14]. El modelo de Vasicek se emplea también en algunos de los ejercicios empíricos abordados en este trabajo, en el que se denota como $\mathbf{V} = (V^1, \dots, V^N)$.

³¹ Esta clase de modelos se presenta brevemente en el Apéndice C. Cabe señalar que en algunos trabajos, como [107], [36] y [54], además de variables macroeconómicas observables se añaden al modelo factores latentes con el fin de completar la dependencia entre unidades no capturada por las primeras, en cuyo caso los segundos se denominan variables o factores *frailty*.

El modelo de Vasicek viene dado por:

$$V^j = N \left(\frac{N^{-1}(\alpha^j) - \sqrt{\beta^j} z^j}{\sqrt{1 - \beta^j}} \right) \quad (2.21)$$

con $0 < \alpha^j < 1$, $0 < \beta^j < 1$ y $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^N) \sim N((0, \dots, 0), \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{\Sigma}(j, j) = 1$, $j = 1, \dots, N$.

Se cumple que $E[V^j] = \alpha^j$, por lo que α^j es la PD esperada para la unidad de riesgo j , mientras que la correlación de activos de V^j , ρ_V^j , es igual a β^j , lo que permite identificar este parámetro con la estructura de dependencia entre deudores de una misma unidad.

Además, (i) en ocasiones se denota como “modelo de cópula gaussiana” (*gaussian copula model*) puesto que la dependencia entre deudores se establece por medio del vector \mathbf{z} , (ii) cuando la correlación es igual a 1 entre todas las variables³² z^j se obtiene el denominado *modelo ASRF* (*Asymptotic Single Risk Factor*), que es la versión empleada en el modelo regulatorio y se corresponde con el modelo de pérdida formulado en (2.5), y (iii) se han propuesto distintas extensiones, como, por ejemplo, las discutidas en [27] para la estructura de dependencia o la formada por el propio modelo *CreditMetrics*, de KMV, que supone su generalización al evento de migración.

Cualquier manual sobre riesgo de incumplimiento ofrece una introducción al modelo de Vasicek, así como el propio autor en [158], por lo que aquí se discuten de forma breve sus propiedades analíticas y de implementación.

En lo que respecta a las propiedades analíticas, se cumplen, además de $E[V^j] = \alpha^j$ y $\beta^j = \rho_V^j = V[N^{-1}(V^j)] / (1 + V[N^{-1}(V^j)])$, las siguientes identidades³³:

$$V[V^j] = N_2[N^{-1}(\alpha^j), N^{-1}(\alpha^j); \beta^j] - (\alpha^j)^2 \quad (2.22)$$

$$Cov[V^j, V^k] = N_2[N^{-1}(\alpha^j), N^{-1}(\alpha^k); \sqrt{\beta^j \beta^k}] - \alpha^j \alpha^k \quad (2.23)$$

$$P(V^j \leq v^j) = N \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^j}} \left(N^{-1}(v^j) \sqrt{1 - \beta^j} - N^{-1}(\alpha^j) \right) \right) \quad (2.24)$$

de donde:

$$P(V^j \leq \eta^j) = u^j \Leftrightarrow \eta^j = N \left(\frac{N^{-1}(\alpha^j) - \sqrt{\beta^j} N^{-1}(1 - u^j)}{\sqrt{1 - \beta^j}} \right) \quad (2.25)$$

Las expresiones anteriores, en especial la última, evidencian la elevada tratabilidad analítica de la distribución, que permite el cálculo determinista del VaR de L^j bajo infinita granularidad.

³² Es decir, cuando todas las variables z^j son la misma.

³³ Siendo $N_2[x, y; \rho]$ la función de distribución bivalente de la Normal estándar con correlación ρ evaluada en el punto (x, y) .

La implementación y uso del modelo resultan sencillos. Por un lado, la identificación de la distribución es inmediata a partir de la transformada de Λ^h por la función $N^{-1}(\cdot)$, o bien a través de sus momentos³⁴. Por otro, su simulación Monte Carlo no plantea dificultades, puesto que se reduce a la simulación de la Normal N -variante formada por $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^N)$. Además, V^j admite una interpretación económica sencilla: la PD esperada de cada unidad se “perturba” en torno a su media en función del ciclo económico, representado por z^j , y de la sensibilidad de la unidad a éste, dada por ρ^j .

En lo que respecta al caso multiperiodo, bajo una aproximación estática la serie de HR de cada unidad da lugar a Q series de HR solapadas, de forma que:

$$\Lambda^h = \begin{pmatrix} \dot{h}_{ti}^1 & \dot{h}_{ti+1}^1 & \cdots & \dot{h}_{ti+Q-1}^1 & \cdots & \dot{h}_{ti}^N & \dot{h}_{ti+1}^N & \cdots & \dot{h}_{ti+Q-1}^N \\ \dot{h}_{ti+1}^1 & \dot{h}_{ti+2}^1 & \cdots & \dot{h}_{ti+Q}^1 & \cdots & \dot{h}_{ti+1}^N & \dot{h}_{ti+2}^N & \cdots & \dot{h}_{ti+Q}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{h}_{tf-Q}^1 & \dot{h}_{tf-Q+1}^1 & \cdots & \dot{h}_{tf-1}^1 & \cdots & \dot{h}_{tf-Q}^N & \dot{h}_{tf-Q+1}^N & \cdots & \dot{h}_{tf-1}^N \\ \dot{h}_{tf-Q+1}^1 & \dot{h}_{tf-Q+2}^1 & \cdots & \dot{h}_{tf}^1 & \cdots & \dot{h}_{tf-Q+1}^N & \dot{h}_{tf-Q+2}^N & \cdots & \dot{h}_{tf}^N \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

A esta matriz de datos se le ajusta una distribución NQ -variante cuyas marginales son las distribuciones de PD para cada unidad y periodo del horizonte de cálculo, F_s^j , $j = 1, \dots, N$ y $s = 1, \dots, Q$. F^j se obtiene entonces como $F^j = \mathcal{F}(F_1^j, \dots, F_Q^j)$.

2.4.4.3. Aproximación dinámica

La aproximación dinámica se basa en el ajuste de un modelo dinámico N -variante al vector de series $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$. El planteamiento general suele involucrar la consideración de las variables de estado de la dinámica, que se fijan a un valor o para las que se asume una distribución, y que dan lugar a \mathbf{F} a través de la relación dinámica. Así, por ejemplo, si el HR de la unidad de riesgo sigue un proceso AR(1), $h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + u_t$, y H es la distribución escogida para h_{t-1} y U para u_t , entonces $F = \beta_0 + \beta_1 H + U$, mientras que si h_{t-1} queda fijo se tiene que $F = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + U$.

No existe, sin embargo, una metodología estándar para la obtención de la distribución de PD bajo la aproximación dinámica, puesto que ésta se define en función de la dinámica ajustada y del tipo de escenario económico que se desea representar. Este hecho hace de la aproximación dinámica una familia muy heterogénea de modelos a la que se adscriben propuestas diversas como la de [161], que supone una referencia central y en la que el HR es función de variables macroeconómicas observables para las que se asume una dinámica AR(2); [123], que adopta una formulación bayesiana; [20], que considera dinámicas heterocedásticas, o [26], [121] y [131], entre otros, en los

³⁴ Tanto el estimador por momentos como por máxima verosimilitud de α^j coinciden y son iguales a la media de la serie de HR de la unidad. En β^j , sin embargo, difieren, siendo el primero el que se deriva de la ecuación (2.22) y el segundo el dado por la expresión para la correlación de activos. [53] discute la estimación de la correlación de activos en términos estadísticos y prácticos y concluye a favor de la estimación por máxima verosimilitud.

que se opta, con matices, por una dinámica de *cambio de régimen*³⁵ (*regime switching*) para representar distintos estados discretos del ciclo económico. Cabe señalar que en algunas ocasiones, sobre todo cuando se persigue una distribución de “ciclo económico completo”, la aproximación dinámica desemboca en un modelo estático que refleja la distribución de largo plazo del proceso. Así sucede, por ejemplo, en [140], en donde partiendo de una aproximación dinámica se obtiene finalmente el modelo de distribución de Vasicek.

De la aproximación dinámica pueden destacarse cuatro puntos.

Primero, es en el marco multiperiodo donde más se evidencia la diferencia entre un marco estático y uno dinámico, puesto que en el segundo se emplean las sendas condicionales que se derivan de la dinámica para establecer la dependencia entre las distribuciones F_s^j asociadas a los distintos periodos del horizonte de cálculo, con $F^j = \mathcal{F}(F_1^j, \dots, F_Q^j) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - F_s^j)$.

Segundo, el enfoque dinámico está fuertemente vinculado a la medición condicional, es decir, a la obtención de una distribución F condicionada a la información disponible en t , F_t , como sucede en [141], [36], [140] y [132], por citar sólo algunos ejemplos. En tal caso, $F_t^j = \mathcal{F}(H_{1/t}^j, \dots, H_{Q/t}^j)$, donde $H_{s/t}$ es la distribución condicional del HR de la unidad j en el periodo $t + s$ dada la información disponible³⁶ en t , con $s = 1, \dots, Q$.

Tercero, es habitual la incorporación de variables macroeconómicas en la dinámica de \mathbf{h}_t , como sucede, por ejemplo, en [98], [107], [149], [161] y [131]. La práctica habitual supone considerar un número reducido de variables comunes a todas las unidades. Su inclusión otorga un carácter más estructural al modelo, permite efectuar análisis adicionales sobre la base de éste y le dota de sentido económico.

Cuarto, al estar h_t^j acotado, $0 < h_t^j < 1$, resulta conveniente el ajuste de una dinámica con *función de enlace* φ , de forma que la dinámica se formula para $x_t^j = \varphi^{-1}(h_t^j)$, donde x_t^j tiene soporte no acotado, y las distribuciones condicionales se obtienen como $H_{s/t} = \varphi(X_{s/t}^j)$, siendo $X_{s/t}$ la distribución condicional de x_t^j en el periodo $t + s$ dada la información disponible en t , con $s = 1, \dots, Q$. Las funciones de enlace más habituales son la *logística*, $\varphi(x_{s/t}^j) = 1/(1 + \exp(-x_{s/t}^j))$, considerada, entre otros, por [107] y [128], y la *probit*, $\varphi(x_{s/t}^j) = N(x_{s/t}^j)$, empleada, por ejemplo, en [24] y [132]. Ambas formulaciones encuentran sentido económico y sustento econométrico en el *modelo de función índice*, revisado en el Apéndice C. [36], [68] y [132] discuten brevemente el papel de la función de enlace en la modelización del riesgo.

³⁵ Véase [88] para una introducción a esta clase de modelos.

³⁶ En lo que sigue la distribución de pérdidas vinculada a F_t se denota por \tilde{L}_t a nivel agregado y L_t^j a nivel unidad de riesgo, con $\mathbf{L}_t = (L_t^1, \dots, L_t^N)$.

2.4.5. Estimación del hazard rate

El HR se estima como el ratio cuyo denominador es el número de deudores de la unidad j expuestos al riesgo de impago al principio del periodo t y cuyo numerador es el número de impagos declarados en dicho periodo según la definición de incumplimiento de la entidad³⁷.

Aunque la definición es sencilla, el cálculo del HR cuenta con algunas dificultades.

Por un lado, y como señala [128], el HR está sujeto a error de realización, error cuya varianza es mayor si el HR de la unidad está cercano a 0 ó 1, como sucede en los denominados *Low Default Portfolios*, abordados en [63]. Dicho error es, como apunta [134], heterocedástico, puesto que depende del número de deudores vinculados a la unidad, número que puede cambiar a lo largo del tiempo.

Por otro lado, el ratio se ve afectado por (i) la censura: deudores que están en riesgo al inicio del periodo pero dejan de estarlo antes de que acabe éste sin haber declarado impago, (ii) la política de concesión de la entidad, que puede intervenir en la serie de forma puntual o permanente, y (iii) el nivel de homogeneidad entre deudores, que de resultar insuficiente puede distorsionar las series y con ellas la cifra de capital, como muestra [89], y (iv) la segmentación empleada y las variaciones de ésta a lo largo del tiempo, como señala [32].

Por último, cabe señalar que en algunos casos no se dispone del número de deudores expuestos al riesgo e impagados con los que estimar el HR, por lo que debe recurrirse a metodologías de cálculo alternativas, entra las que destacan dos.

Primera, el uso de las series de saldo total en riesgo e impagado, lo que da lugar a un ratio de incumplimiento en saldo en vez de en número. Este ratio puede considerarse una aproximación imperfecta al HR, puesto que también recoge el “flujo de impago” asociado a la unidad, si bien, y a diferencia del ratio en número, puede verse distorsionado por la concentración de la cartera³⁸.

Segunda, el uso de la serie de stock crediticio en mora, ya sea en número o en saldo. Esta serie recoge el comportamiento de la denominada *cartera dudosa*, que aumenta con la declaración de impagos y disminuye con los pases a fallido y las recuperaciones. Por ello, y como discute [95], debe ser filtrada para obtener una serie que recoja exclusivamente los impagos declarados en cada periodo. Esta clase de series suele obtenerse de información contable, lo que aumenta su disponibilidad, sobre todo a nivel agregado por países o sectores, pero también la hace más sensible a intervenciones, en especial en caso de alta frecuencia, como muestra la Figura 2.5.

³⁷ Desde la perspectiva de la medición interna del riesgo, la definición de impago es también una decisión propia de la entidad en función de su política de gestión del riesgo.

³⁸ Puesto que el ratio pasa a ser sensible, además de al número de deudores que han incumplido, a la colección de exposiciones efectivas que forma dicho grupo.

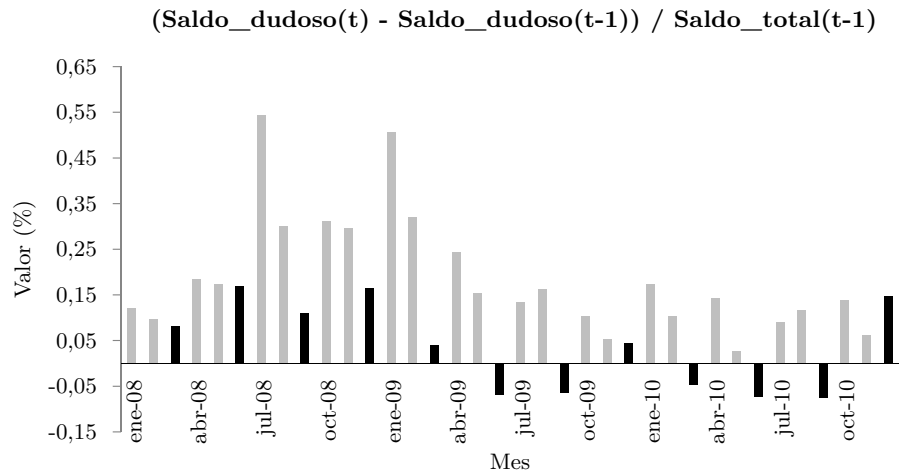


Figura 2.5: *Serie mensual diferenciada de stock de saldo moroso dividida entre el saldo crediticio total al inicio del periodo para el conjunto de las entidades de crédito españolas, según datos del Banco de España para los años 2008 a 2010. Las barras oscuras indican último mes del trimestre.*

Capítulo 3

Modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento

3.1. Introducción

En este capítulo se discuten algunas debilidades asociadas a la medición del riesgo de incumplimiento, en especial bajo el marco de “ciclo económico completo”, y se propone un modelo de distribución de PD que pretende resolverlas. En dicho modelo se sustenta todo el análisis posterior.

El modelo asume una aproximación dinámica que incorpora explícitamente la evolución del riesgo a lo largo del tiempo, es flexible en términos de horizonte y ventana de cálculo y prescinde de hipótesis restrictivas.

El capítulo se estructura así: en el segundo apartado se exponen algunas consideraciones sobre la relación entre el riesgo de incumplimiento y la dinámica de las series de HR. Dichas consideraciones motivan el modelo de distribución F que se propone en el tercer apartado y se discute en el cuarto. Por último, la aplicación a nivel multivariante se trata en el quinto apartado.

3.2. Medición incondicional del riesgo de incumplimiento

3.2.1. El problema de la no estacionariedad

La distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$ de “ciclo económico completo”, así como la condicional a la información disponible en t , $\mathbf{F}_t = (F_t^1, \dots, F_t^N)$, ambas presentadas en el apartado 2.4.4, suponen las distribuciones más habituales para la medición del riesgo de incumplimiento de la cartera de la entidad. Dichas distribuciones obedecen a plan-

teamientos distintos: mientras que la segunda se sustenta habitualmente en un modelo de corte dinámico y su definición formal es clara, la primera suele involucrar, de forma directa o indirecta, la asunción de una distribución estática vinculada a la ventana de cálculo $[tl\ tu]$ y su definición resulta difusa, tanto por la vaguedad del término “ciclo económico completo” como por la necesidad de determinar, como paso previo, los umbrales tl y tu que representen dicho entorno económico.

En el caso de la medición de “ciclo completo” se habla con frecuencia de distribución F incondicional, y de ahí distribución de pérdidas incondicional y en último término capital incondicional. La expresión incondicional se entiende entonces en el sentido de distribución marginal del proceso estocástico que forma la serie de HR de cada unidad. Es decir, F^j es incondicional cuando viene dada por la distribución marginal Q -variante¹ del proceso h_t^j , $\mathbf{H}^{*j} = (H_1^{*j}, \dots, H_Q^{*j})$, de forma que:

$$F^j = \mathcal{F}(H_1^{*j}, \dots, H_Q^{*j}) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - H_s^{*j}) \quad (3.1)$$

Puesto que la distribución marginal no está condicionada a la información existente en ningún periodo, pero recoge el comportamiento de largo plazo del proceso, F^j puede identificarse informalmente con una agregación de distintos estados del ciclo económico, de forma que la incondicionalidad otorga una visión de “ciclo económico completo”.

Llegado este punto es relevante notar que si el proceso estocástico $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ no es estacionario no cuenta con una distribución marginal invariante, y que por tanto no es posible definir en realidad una distribución \mathbf{F} incondicional.

Lo anterior implica que la distribución \mathbf{F} de “ciclo económico completo” está en realidad condicionada a la senda realizada por \mathbf{h}_t en la ventana $[tl\ tu]$, por lo que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{[tl\ tu]}$, y que sólo en el caso de que \mathbf{h}_t sea estacionario y la ventana suficientemente grande, $\mathbf{F}_{[tl\ tu]}$ puede asemejarse en verdad a una distribución incondicional², que para distinguirla del caso general se denota como $\mathbf{F}^* = (F^{*1}, \dots, F^{*N})$, con:

$$F^{*j} = \mathcal{F}(H_1^{*j}, \dots, H_Q^{*j}) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - H_s^{*j}) \quad (3.2)$$

El interés de la observación anterior es doble.

Por un lado, subraya un hecho que no ha suscitado especial atención en la literatura o ha merecido una reflexión superficial. Por ejemplo, [43] subraya las debilidades de la medición del riesgo dados los recurrentes cambios estructurales que sufren los procesos y variables financieras, pero se centra en el problema de respuesta endógena³ y no

¹ En toda la discusión el horizonte de cálculo se asume fijo e igual a Q , por lo que no se explicita en la notación para simplificar ésta.

² En lo que sigue se asume ergodicidad en \mathbf{h}_t , por lo que una realización suficientemente larga de éste caracteriza $\mathbf{H}^{*j} = (H_1^{*j}, \dots, H_Q^{*j})$.

³ Respuesta que el autor resume adaptando la *Ley de Goodhart* a la medición del riesgo: *A risk model breaks down when used for its intended purpose.*

aborda el punto anterior relativo a la inconsistencia de las métricas de “ciclo completo”. [115] advierte que obviar la autocorrelación de la serie de HR puede llevar a una mala estimación de la PD media de la unidad a lo largo del tiempo, puesto que la persistencia obliga a considerar una muestra más larga, pero enmarca este hecho dentro del riesgo de modelo y no acomete una reflexión más general. Otros autores, como [117], observan dependencia de las métricas de riesgo a la ventana de cálculo considerada, pero no cuestionan la “incondicionalidad” en presencia de no estacionariedad. En muchos otros trabajos esta carencia ni siquiera se plantea. Incluso [161], que supone una referencia central en los modelos de corte dinámico, obvia que puede no existir distribución de largo plazo para el HR si los factores macroeconómicos subyacentes, para los que se asume una dinámica AR(2), no son estacionarios.

Por otro lado, marca una distinción relevante entre estacionariedad y no estacionariedad en un ámbito, la medición del riesgo de incumplimiento, en el que las propiedades fundamentales de las series de HR no suelen protagonizar la discusión. Así, en el caso de que $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ sea estacionario (i) la dependencia de \mathbf{F} respecto a la ventana de cálculo no plantea ninguna inconsistencia, y (ii) es posible derivar resultados generales sobre la distribución incondicional.

En lo que respecta al primer punto, la estacionariedad de las series de HR implica que, a mayor longitud de la ventana de cálculo, mayor semejanza entre la distribución ajustada y la incondicional, por lo que incrementar la ventana de cálculo hasta la mayor longitud disponible resulta siempre deseable para recoger un “ciclo económico completo”. Además, la convergencia de $F_{[tl\ tu]}^j$ a F^{*j} , dada por la convergencia de $\mathbf{H}_{[tl\ tu]}^j$ a la distribución marginal \mathbf{H}^{*j} , garantiza que dos ventanas temporales disjuntas pero suficientemente grandes conducen a la misma distribución F^j , F^{*j} , y que, en consecuencia, los límites de la ventana dejan de ser relevantes más allá de la longitud que determinan.

Por su parte, la posibilidad de derivar resultados analíticos es consecuencia de la abundante teoría existente sobre estacionariedad. La Proposición 3.1 ofrece uno en términos de la dinámica del vector $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$.

Proposición 3.1. *Si el vector de HR de la cartera, $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$, sigue una dinámica dada por $\mathbf{h}_t = \psi(\mathbf{x}_t)$, con $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, y $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^N)$ admite una representación lineal de coeficientes fijos e innovaciones normales en espacio de los estados de la forma⁴:*

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{t+1} &= \mathbf{T}\mathbf{z}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_t + \mathbf{E}\mathbf{w}_t \\ \mathbf{x}_t &= \mathbf{H}\mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t + \mathbf{C}\mathbf{v}_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

entonces:

1. $\mathbf{F}^* = (F^{*1}, \dots, F^{*N})$ existe si \mathbf{u}_t es estacionario y los autovalores de \mathbf{T} tienen módulo inferior a la unidad.

⁴ Véase [154] para los detalles de la formulación y las restricciones sobre las matrices y variables del sistema.

2. Si $Q = 1$, ψ es la función de distribución de la Normal estándar y se cumplen las condiciones del punto anterior, entonces $\mathbf{F}^* = (F^{*1}, \dots, F^{*N})$ es de hecho una distribución de Vasicek N -dimensional, $\mathbf{F}^* \equiv \mathbf{V} = (V^1, \dots, V^N)$.

Demostración

En lo que respecta al primer punto, por ser ψ continua, \mathbf{h}_t es estacionario si lo es \mathbf{x}_t , y \mathbf{x}_t es estacionario si se cumplen las condiciones señaladas, como muestra [154]. En tal caso, existen, para todo j , $j = 1, \dots, N$, y s , $s = 1, \dots, Q$, las distribuciones H_s^{*j} , por lo que también existe $\mathbf{F}^* = (F^{*1}, \dots, F^{*N})$, con $F^{*j} = \mathcal{F}(H_1^{*j}, \dots, H_Q^{*j}) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - H_s^{*j})$.

Sobre el segundo punto, y como muestra también [154], en el caso de la formulación anterior la distribución incondicional de \mathbf{x}_t , $\mathbf{X}^* = (X^{*1}, \dots, X^{*N})$, es Normal multivariante. Sean $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{\Sigma}^*$ su vector de medias, de dimensión N , su matriz de varianzas-covarianzas, de dimensión $N \times N$, y su matriz de correlaciones, de dimensión $N \times N$, respectivamente.

Por ser ψ continua y $Q = 1$, $\mathbf{F}^* = \mathbf{H}^* = N(\mathbf{X}^*) = (N(X^{*1}), \dots, N(X^{*N}))$, por lo que esta distribución puede representarse como una distribución de Vasicek, $\mathbf{V} = (V^1, \dots, V^N)$, tomando $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^N)$ como la distribución Normal multivariante con vector de medias $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, matriz de varianzas-covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}^*$ y siendo α^j y β^j :

$$\alpha^j = N \left(\frac{\mu^j}{\sqrt{1 + v^j}} \right) \quad (3.4)$$

$$\beta^j = \frac{v^j}{1 + v^j} \quad (3.5)$$

donde $v^j = \boldsymbol{\Sigma}(j, j)$, $j = 1, \dots, N$.

Es decir,

$$\begin{aligned} F^{*j} &= V^j \\ &= N \left(\frac{N^{-1}(\alpha^j)}{\sqrt{1 - \beta^j}} + \frac{\sqrt{\beta^j}}{\sqrt{1 - \beta^j}} z^j \right) \\ &= N \left(\frac{N^{-1} \left(N \left(\frac{\mu^j}{\sqrt{1 + v^j}} \right) \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^j}{1 + v^j}}} + \frac{\sqrt{\frac{v^j}{1 + v^j}}}{\sqrt{1 - \frac{v^j}{1 + v^j}}} z^j \right) \\ &= N \left(\mu^j + \sqrt{v^j} z^j \right) \\ &= N(X^{*j}) \\ &= H^{*j} \end{aligned} \quad (3.6)$$

con:

$$\begin{aligned}
Cov [N^{-1} (F^{*j}), N^{-1} (F^{*k})] &= Cov \left[\frac{N^{-1} (\alpha^j)}{\sqrt{1 - \beta^j}} + \frac{\sqrt{\beta^j}}{\sqrt{1 - \beta^j}} z^j, \frac{N^{-1} (\alpha^k)}{\sqrt{1 - \beta^k}} + \frac{\sqrt{\beta^k}}{\sqrt{1 - \beta^k}} z^k \right] \\
&= \frac{\sqrt{\beta^j}}{\sqrt{1 - \beta^j}} \frac{\sqrt{\beta^k}}{\sqrt{1 - \beta^k}} v^{*jk} \\
&= \sqrt{\frac{\beta^j}{1 - \beta^j}} \sqrt{\frac{\beta^k}{1 - \beta^k}} v^{*jk} \\
&= \sqrt{\frac{v^j}{1 + v^j}} \sqrt{\frac{v^k}{1 + v^k}} v^{*jk} \\
&= \frac{\sqrt{v^j} \sqrt{v^k}}{v^{jk}} v^{*jk} \\
&= v^{jk}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

siendo $v^{jk} = \Sigma(j, k)$ y $v^{jk*} = \Sigma^*(j, k)$, $j, k = 1, \dots, N$.

■

El segundo punto de la proposición resulta especialmente relevante puesto que muestra el carácter general de la distribución de Vasicek, que bajo ciertas condiciones, incluida la estacionariedad de \mathbf{x}_t , resulta en la distribución \mathbf{F}^* para una amplia familia de dinámicas de $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ bajo función de enlace probit.

Las buenas propiedades vinculadas a la estacionariedad de \mathbf{h}_t desaparecen en el caso general de no estacionariedad debido a la influencia que la ventana de cálculo adquiere sobre las métricas de riesgo, puesto que entonces $F_{[tl \ tu]}$ es sensible a la inclusión o eliminación de periodos de la ventana, en especial cuando éstos están asociados a HR mucho mayores o menores que la media.

Este efecto introduce inestabilidad en las métricas de riesgo, puesto que la observación de nuevos valores de la serie de HR puede conducir a distribuciones de PD significativamente distintas según se actualice la ventana de cálculo, aún cuando ésta tenga una longitud significativa. Ya no es claro entonces que la mejor opción para representar un “ciclo económico completo” sea considerar la mayor ventana de cálculo disponible. La entidad enfrenta, de hecho, el problema de escoger la ponderación de periodos “buenos” y “malos” que dan lugar a un ciclo “equilibrado” o “representativo”. El principio de estabilidad debe interpretarse ahora como *equidad*, y la incondicionalidad es de hecho “incondicionalidad”, donde el entrecomillado representa el carácter informal e incluso alegórico de una propiedad inexistente bajo no estacionariedad⁵. Se disocia, por tanto, el concepto de “ciclo económico completo” del de “métricas de riesgo estables”, ya que incluso dos ventanas distintas vinculadas a dos ciclos similares en

⁵ A lo largo del cuerpo del documento se conserva el entrecomillado como recordatorio de esta debilidad.

términos macroeconómicos pueden arrojar distribuciones de PD diferentes.

De esta forma, en el caso de no estacionariedad de las series de HR, la elección de la ventana de cálculo vinculada a una medición de “ciclo económico completo” resulta crítica y se añade a las otras decisiones que, como la fijación del nivel de cobertura, debe tomar la entidad en el proceso de medición de su riesgo de incumplimiento. Surge, de hecho, cierta “inconsistencia temporal”, puesto que la distribución “incondicional” se calibra con base en un ciclo observado con el fin de determinar, entre otras medidas, el capital que la entidad requiere para enfrentar el ciclo que está por venir. Dichos ciclos pueden conducir, sin embargo, a distribuciones F notablemente distintas como consecuencia de la no estacionariedad de las series de HR.

Por último, cabe señalar que la convergencia de $H_{[tl\ tu]}^j$ a su distribución marginal H^{*j} puede ser lenta si la dependencia serial es elevada, por lo que en una ventana de moderada longitud también pueden observarse las debilidades anteriores aún cuando h_t^j sea estacionario.

3.2.2. Utilidad de las distribuciones condicionales

La discusión anterior muestra la debilidad de la aproximación estática y la medición de “ciclo económico completo”. Por el contrario, las distribuciones condicionales $\mathbf{F}_t = (F_t^1, \dots, F_t^N)$, vinculadas, como se señaló en el apartado 2.4.4, a la modelización dinámica, ofrecen una medición del riesgo completamente consistente.

Así, por un lado, existen siempre, sea o no estacionario \mathbf{h}_t , y su formulación está bien definida para cualquier horizonte Q :

$$F_t^j = \mathcal{F} \left(H_{1/t}^j, \dots, H_{Q/t}^j \right) = 1 - \prod_{s=1}^Q \left(1 - H_{s/t}^j \right) \quad (3.8)$$

con $\mathbf{H}_t^j = \left(H_{1/t}^j, \dots, H_{Q/t}^j \right)$ el vector de distribuciones condicionales de h_t^j a la información disponible en t .

Por otro lado, recogen de forma precisa la evolución del riesgo de incumplimiento a lo largo de la ventana según se actualiza la información disponible relevante para el HR, información que recoge, en particular, el estado del ciclo económico y que en consecuencia varía con éste.

Además, la consideración de las distribuciones condicionales enriquece el análisis del riesgo de incumplimiento, aporta información valiosa sobre la cartera y su evolución temporal y contribuye al estudio de problemas relevantes, como la prociclicidad, la medición del desempeño, la determinación del nivel de cobertura óptimo, la eficiencia computacional, el reparto de capital o su planificación financiera. Facilita también la integración del modelo de pérdida con otras herramientas, como el análisis de escenarios, así como con los otros riesgos que enfrente la entidad para los que también tenga

sentido definir una distribución condicional.

Aproximarse al riesgo de incumplimiento desde las distribuciones condicionales F_t supone asumir una *visión condicional* de éste, en la que el justificado interés por la estabilidad y las distribuciones y métricas de riesgo “incondicionales” se aúna con el análisis y medición de su evolución a lo largo del tiempo a través de las distribuciones y métricas condicionales, lo que conlleva asumir una auténtica perspectiva dinámica.

Una perspectiva que, aunque evidentemente útil, está en la actualidad relegada en favor del marco estático, favorecido por su vinculación con la medición “incondicional” y la prevalencia de ésta, y sobre la que es necesario profundizar más y promover, como señala [143], un mayor debate y discusión.

Trabajos como [98], [141], [26], [106], [140], [132], [131], [128], o el propio [143] abordan, con matices y desde distintas perspectivas, esta discusión. El modelo de distribución F que se presenta en este capítulo y se desarrolla y aplica en los posteriores se enmarca en su misma línea. El objetivo de este trabajo es, como se señaló en la Introducción, profundizar en el análisis del riesgo de incumplimiento a través de las distribuciones condicionales y explorar, en particular, algunas de las propiedades y ventajas enunciadas en el párrafo anterior. El punto de partida es el modelo de distribución de PD “incondicional” sustentado en las distribuciones condicionales que se propone en el siguiente apartado.

3.3. Modelo propuesto

Para simplificar la exposición, el modelo se presenta a nivel de unidad de riesgo, por lo que se prescinde del superíndice j . Su aplicación en el caso de una cartera crediticia con N unidades de riesgo resulta inmediata y se trata en el apartado 3.5.

Se asume una formulación probit para la serie de HR de la unidad, de forma que $h_t = N(x_t)$, donde $N(\cdot)$ es la función de distribución de la Normal estándar y x_t es un proceso estocástico con soporte en \mathbb{R} . Siguiendo con la notación empleada previamente, $X_{s/t}$, $s = 1, \dots, Q$, es la distribución condicional de x_t en $t + s$ dada la información disponible en t , con $Y_{s/t} = N(X_{s/t})$.

Se define entonces la *componente* W_t^Q como el complementario a 1 del valor de la curva de supervivencia en tiempo discreto a horizonte Q sobre las distribuciones condicionales $Y_{s/t}$, es decir:

$$W_t^Q = \mathcal{F}(Y_{1/t}, \dots, Y_{Q/t}) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - Y_{s/t}) \quad (3.9)$$

Por otra parte, se define $\mathcal{I}_{[tl\ tu]}$ como la variable multinomial que toma el valor t , $t = tl, \dots, tu$, con probabilidad $1/T$, siendo $T = tu - tl + 1$.

El modelo de distribución de PD propuesto a horizonte Q para la ventana $[tl \ tu]$, $\Pi_{[tl \ tu]}^Q$, se define entonces como:

$$\Pi_{[tl \ tu]}^Q = W_t^Q \circ \mathcal{I}_{[tl \ tu]} \quad (3.10)$$

Es decir,

$$\Pi_{[tl \ tu]}^Q = \begin{cases} W_{tl}^Q & si & \mathcal{I}_{[tl \ tu]} = tl \\ W_{tl+1}^Q & si & \mathcal{I}_{[tl \ tu]} = tl + 1 \\ \dots & & \\ W_{tu-1}^Q & si & \mathcal{I}_{[tl \ tu]} = tu - 1 \\ W_{tu}^Q & si & \mathcal{I}_{[tl \ tu]} = tu \end{cases} \quad (3.11)$$

Para facilitar la notación, en lo que sigue se prescinde, con carácter general, del superíndice Q y del subíndice $[tl \ tu]$. Se asume además que la ventana de cálculo viene dada por $[1 \ T]$, por lo que la expresión anterior puede formularse como:

$$\Pi = W_t \circ \mathcal{I} = \begin{cases} W^1 & si & \mathcal{I} = 1 \\ W^2 & si & \mathcal{I} = 2 \\ \dots & & \\ W^{T-1} & si & \mathcal{I} = T - 1 \\ W^T & si & \mathcal{I} = T \end{cases} \quad (3.12)$$

Así definida, Π cuenta con algunas características notables.

Primera, es una *mixtura uniforme*⁶ de las distribuciones condicionales W_t , es decir:

$$\Pi = W_t \circ \mathcal{I} = \begin{cases} W^1 & con \ prob. & 1/T \\ W^2 & con \ prob. & 1/T \\ \dots & & \\ W^{T-1} & con \ prob. & 1/T \\ W^T & con \ prob. & 1/T \end{cases} \quad (3.13)$$

Por tanto, las componentes W_t representan la distribución condicional de PD de la unidad a la información disponible en el periodo t , y pueden expresarse entonces como $W_t = \Pi / [\mathcal{I} = t]$. Es decir, bajo el modelo propuesto, $F_t \equiv W_t$.

Segunda, queda determinada por el modelo dinámico subyacente que gobierna x_t , el cual caracteriza las distribuciones condicionales $X_{s/t}$, $s = 1, \dots, Q$, y supone en consecuencia su “metaparámetro”.

⁶ Véase [122] para una introducción a las mixturas finitas.

Cabe señalar que (i) la dinámica no se restringe a ninguna formulación particular, por lo que puede incorporar o no variables explicativas, expresiones no lineales, cambios de régimen o cualquier formulación econométrica de interés, y (ii) se identifica a partir del vector de datos:

$$\mathbf{\Lambda}^x = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_T)' = \left(N^{-1} \left(\dot{h}_1 \right), \dots, N^{-1} \left(\dot{h}_T \right) \right)' \quad (3.14)$$

siendo $\{\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_T\}$ una realización de h_t .

Tercera, la generación de un valor de Π requiere la realización de un valor de \mathcal{I} , es decir, la elección de uno de los T periodos equiprobables, y, dado t , la realización de una senda condicional de x_t de longitud Q . Hay, en consecuencia, dos fuentes de incertidumbre diferenciadas: (i) la elección del periodo de la ventana, y (ii) la senda condicional a la información disponible en éste.

La Figura 3.1 representa el modelo de distribución F propuesto.

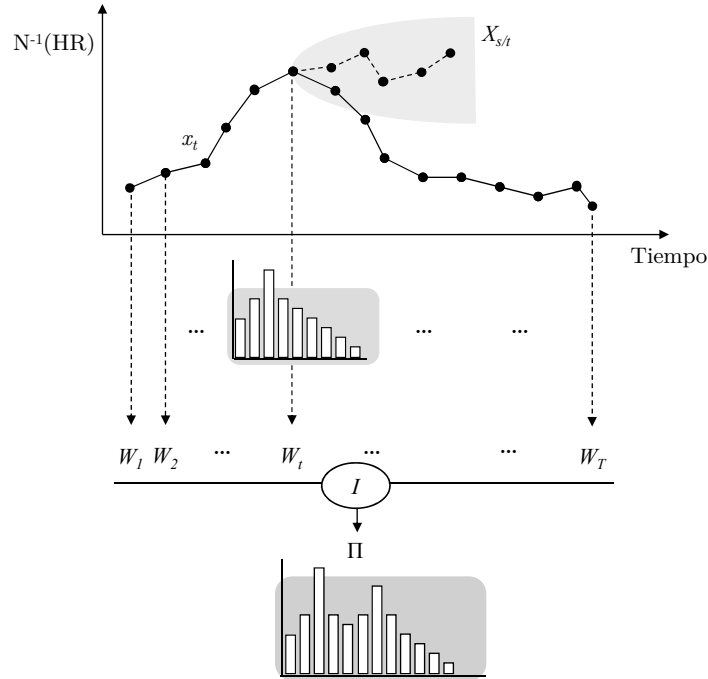


Figura 3.1: A partir del modelo dinámico subyacente es posible generar, para cualquier periodo t , sendas condicionales de x_t con horizonte Q . Dichas sendas dan lugar a W_t . Π se obtiene como una mixtura uniforme de todas las distribuciones W_t de la ventana de cálculo.

3.4. Discusión

3.4.1. Relación con otros trabajos

El modelo de distribución de PD propuesto es un modelo de corte dinámico, que no depende de la dinámica subyacente escogida para x_t y cuya principal característica es la definición de la distribución de PD en el conjunto de la ventana de cálculo a partir de las distribuciones condicionales, sin asumir por tanto ninguna distribución paramétrica para el vector de datos Λ^x .

El carácter dinámico del modelo propuesto es evidente y se ve reflejado, en particular, en la consideración de las sendas condicionales $X_{s/t}$ y en el tratamiento multiperiodo que se sustenta en ellas. Cabe señalar que esta elección resulta ventajosa respecto al uso de Q predicciones estáticas tanto por motivos econométricos como de medición del riesgo. En lo que respecta a los primeros, [120] muestra que las sendas condicionales ofrecen una mejor predicción, sobre todo a horizontes elevados. En lo que respecta a los segundos, [55] y [57] subrayan la conveniencia de recoger la dinámica de los HR en la generación de las distribuciones condicionales por razones de flexibilidad y consistencia. En [55] también se defiende la conveniencia de formular un modelo general que no dependa de la dinámica subyacente escogida.

La “agregación” a lo largo del eje temporal de las distribuciones condicionales con el fin de obtener métricas de riesgo “incondicionales” supone la característica principal del modelo. Este enfoque, como se discute posteriormente, ya ha sido considerado en otros trabajos, sobre todo en términos de las distribuciones de pérdida L y L_t . Sin embargo, su uso ha sido instrumental, con una discusión de sus ventajas e implicaciones superficial, sin quedar integrado en un marco formal y, sobre todo, sin sustentar un análisis profundo del riesgo de incumplimiento desde una perspectiva condicional.

Por ello, el modelo propuesto en el apartado 3.3 y la discusión realizada en los apartados 3.4 y 3.5 suponen una contribución a este enfoque respecto a la aplicación considerada en dichos trabajos, contribución que puede resumirse en tres puntos, de relevancia creciente.

1. Formalización en un marco de independencia condicional como una distribución de PD para el conjunto de la ventana en que la distribución “incondicional” se obtiene como una mixtura uniforme de las distribuciones condicionales.
2. Análisis de las propiedades y consideraciones que se derivan de su sustento condicional y de su condición de mixtura, de la elección e influencia de la dinámica subyacente y de los procedimientos de estimación y simulación.
3. Vinculación con el problema de la no estacionariedad de las series de HR y la medición del riesgo de incumplimiento a través de las distribuciones condicionales, tratado en los capítulos siguientes y para el que constituye el instrumento de análisis principal.

Entre los trabajos que consideran las distribuciones condicionales como base para obtener una distribución incondicional cabe destacar a [134], que apunta en la misma línea que la discusión precedente y señala que un modelo de corte dinámico como el propuesto por [161] puede verse mejorado si la distribución “incondicional” se obtiene aplicando la dinámica sobre la senda realizada previa a cada periodo de la ventana, en vez de asumir para ésta una distribución paramétrica. Aunque también comparte algunos de los puntos discutidos anteriormente, en especial el problema de la estacionariedad, e inspira algunas de las aplicaciones exploradas en los capítulos sucesivos, no ofrece un marco formal en el que establecer su condición de mixtura y estudiar sus propiedades, y, sobre todo, no aborda un análisis del riesgo de incumplimiento con base en las distribuciones condicionales.

Por su parte, [98], también en un modelo de corte dinámico, emplea las distribuciones condicionales como herramienta en la simulación de la distribución de pérdidas “incondicional”, repartiendo uniformemente entre todas ellas las G simulaciones de Monte Carlo necesarias para caracterizar dicha distribución. Sin embargo, su uso no deja de ser instrumental y no es objeto de un análisis propio. En otros muchos trabajos, las predicciones condicionales se comparan con la distribución de impagos a lo largo de la ventana con el fin de medir su bondad de ajuste, lo que obviamente queda lejos del uso aquí propuesto pero sí evidencia la utilidad de las primeras para caracterizar la segunda.

Además de las referencias anteriores, el modelo propuesto guarda relación con otros trabajos, que pueden dividirse en dos grupos: (i) aquellos en los que, de forma explícita o implícita, se considera una mixtura como herramienta de agregación de distintos entornos económicos, y (ii) aquellos en los que se emplea el método de remuestreo para la obtención de la distribución de pérdidas.

En lo relativo al primer grupo, la formalización de Π en términos de una mixtura uniforme de las T distribuciones condicionales, aunque no considerada previamente, sí puede entenderse como una extensión a los planteamientos de trabajos que, habitualmente en un marco de cambio de régimen, obtienen la distribución “incondicional” como una agregación ponderada de distribuciones condicionadas a un número reducido de estados discretos de la economía, donde los pesos vienen dados por la frecuencia relativa de dichos estados a lo largo del tiempo.

Por ejemplo, [26] incluye como explicativa del HR, dentro de un modelo dinámico, una variable dicotómica no observable que identifica con sendos estados del “ciclo crediticio”. [131] considera la mixtura de dos distribuciones, asociadas a épocas de “expansión” y de “recesión”, y añade un “espíritu” dinámico al permitir que sus pesos relativos en la mixtura varíen con el tiempo. [11] y [133] adoptan también una formulación de estados discretos en el ámbito de los modelos de migración. El modelo propuesto, Π , puede entenderse como un caso extremo de este enfoque en el que se consideran para la economía tantos estados discretos como periodos forman la ventana, y en donde los pesos son iguales para todas ellas. Dichos periodos recogen, implícitamente, épocas de recesión, expansión o estancamiento si así se observa en los HR durante la ventana de cálculo.

En lo que respecta al segundo punto, la relación del modelo propuesto con la metodología de remuestreo se debe a que bajo el primero la “información disponible” en cada periodo también se captura de forma no paramétrica mediante T “escenarios condicionantes”, los correspondientes a cada componente W_t , sin asumir por tanto ninguna distribución particular. Por ello, la generación de un valor de Π puede interpretarse como una mezcla de simulación histórica para la “información disponible”, lo que equivale a remuestreo sobre una muestra de tamaño T , y simulación estocástica para las sendas condicionales del HR en cada periodo. Es decir, Π puede entenderse como una extensión de la metodología de remuestreo para capturar la incertidumbre sobre la evolución del HR a horizonte Q .

Así, por ejemplo, en [139] también se consideran distribuciones condicionales pero no la evolución condicional del HR, mientras que en [28], donde sí se intenta recoger esta fuente de variabilidad, se emplea de nuevo remuestreo sobre las sendas históricas, lo que apenas enriquece el soporte de valores de la distribución e impide vincular las sendas condicionales con la información disponible en cada periodo.

En conclusión, el modelo propuesto integra, formaliza y perfila distintos conceptos, aproximaciones y metodologías de cálculo hasta ahora inconexos, algunos de ellos ya existentes y otros introducidos en este trabajo, para obtener un modelo de distribución de PD de corte dinámico con el que abordar un análisis del riesgo de incumplimiento con base en las distribuciones condicionales, incluida la medición “incondicional”.

3.4.2. Fundamentos

3.4.2.1. Introducción

El modelo propuesto recoge las consideraciones hechas en el apartado 3.2 relativas a (i) la potencial inconsistencia de las métricas “incondicionales” en caso de no estacionariedad, y (ii) la necesidad de considerar las distribuciones condicionales y la evolución del riesgo de incumplimiento a lo largo del tiempo.

3.4.2.2. Respuesta al problema de la no estacionariedad

El problema de la no estacionariedad se refleja en el hecho de que no se hace ninguna asunción sobre la existencia de una distribución marginal del HR. En su lugar, la distribución de PD asociada a cualquier ventana de cálculo se obtiene a partir de las distribuciones condicionales a los periodos que la forman, las cuales, como se ha subrayado anteriormente, existen siempre. Esta propiedad, que diferencia a Π del enfoque estático, permite una medición del riesgo consistente con la realidad de éste como proceso estocástico posiblemente no estacionario, y del que se observa en la práctica una realización de escasa longitud.

La consistencia del modelo propuesto se refleja también en el caso de estacionarie-

dad, puesto que Π converge a la distribución incondicional $F^* = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_s^*))$ cuando T es suficientemente amplio, con $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_Q^*)$ la distribución incondicional Q -variante de x_t . La Proposición 3.2 y la Proposición 3.3 establecen este resultado, que necesita para su demostración del Lema 3.1.

Lema 3.1. *Sea $\{x_t\} = \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ un proceso estocástico estacionario y ergódico con soporte⁷ en \mathbb{R} , con distribución incondicional X^* , de densidad $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y distribución condicional a la información disponible en t $X_t = X_{1/t}$, de densidad $g_{1/t} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, cumpliendo que:*

$$X_t = X_{1/t} = X^* / [x_t = \dot{x}_t, \dots, x_{t-N} = \dot{x}_{t-N}] \quad (3.15)$$

para $N \in \mathbb{N}$ fijo y $\dot{x}_{t-s} \in \mathbb{R}, s = 0, \dots, N-1$.

Entonces, la mezcla uniforme de las distribuciones condicionales $\{X_{1/1}, \dots, X_{1/T}\}$, $\tilde{X}_{1,\dots,T}$, construida a partir de una realización $\{\dots, \dot{x}_{-2}, \dot{x}_{-1}, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots\}$ de $\{x_t\}$ converge en distribución a X^* según T tiende a infinito,

$$\tilde{X}_{1,\dots,T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} X^* \quad (3.16)$$

Demostración.

Sea $g^{N+1}, g^{N+1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{N+1})$, la función de densidad incondicional $N+1$ -variante de $\{x_t\}$. Es decir, la función de densidad del vector $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_N^*)$, que no depende de t por ser $\{x_t\}$ estacionario.

Sea $g_{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N}^{N+1}, g_{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N}^{N+1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, la densidad marginal de $(X_0^*, X_1^*, \dots, X_N^*)$ en la primera componente para el punto $(X_1^* = \dot{x}_1, \dots, X_N^* = \dot{x}_N)$, que en consecuencia tampoco depende de t .

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple entonces que:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g_{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N}^{N+1}(x) g^N(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \partial \dot{x}_1, \dots, \partial \dot{x}_N = E_{X_1^*, \dots, X_N^*} \left[g_{X_1^*, \dots, X_N^*}^{N+1}(x) \right] \quad (3.17)$$

siendo $g^N, g^N \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ la distribución N -variante del vector (X_1^*, \dots, X_N^*) .

La estacionariedad de $\{x_t\}$ permite aplicar entonces los *mean ergodic theorems*⁸ para obtener, dado $x \in \mathbb{R}$ fijo, que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{\dot{x}_{t-1}, \dots, \dot{x}_{t-N}}^{N+1}(x) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} E_{X_1^*, \dots, X_N^*} \left[g_{X_1^*, \dots, X_N^*}^{N+1}(x) \right] \quad (3.18)$$

⁷ El resultado puede extenderse de forma inmediata a cualquier abierto $A, A \subset \mathbb{R}$.

⁸ Véase [159] para una introducción a la teoría ergódica.

y por la condición (3.17),

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{\dot{x}_{t-1}, \dots, \dot{x}_{t-N}}^{N+1}(x) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} g(x) \quad (3.19)$$

con $\{\dots, \dot{x}_{-2}, \dot{x}_{-1}, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots\}$ una realización de $\{x_t\}$.

Puesto que (3.19) se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{\dot{x}_{t-1}, \dots, \dot{x}_{t-N}}^{N+1} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} g \quad (3.20)$$

Por otro lado, bajo las condiciones del enunciado se tiene que:

$$X_{1/t} = X^* / [x_t = \dot{x}_t, \dots, x_{t-N+1} = \dot{x}_{t-N+1}] \quad (3.21)$$

por lo que $g_{1/t} = g_{\dot{x}_t, \dots, \dot{x}_{t-N+1}}^{N+1}$ y se cumple que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{1/t} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} g \quad (3.22)$$

de donde se deriva finalmente que:

$$\tilde{X}_{1, \dots, T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} X^* \quad (3.23)$$

ya que por su condición de mixtura uniforme de las distribuciones condicionales $X_{1/t}$, $t = 1, \dots, T$, la densidad de $\tilde{X}_{1, \dots, T}$ viene dada, como muestra [122], por $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{1/t}$. ■

Este resultado puede extenderse de forma inmediata para cualquier distribución $X_{s/t}$ que cumpla que $X_{s/t} = X^* / [x_t = \dot{x}_t, \dots, x_{t-N+1} = \dot{x}_{t-N+1}]$, para $N \in \mathbb{N}$ fijo, y por ello también al vector incondicional Q -variante $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_Q^*)$ si se cumple que:

$$\mathbf{X}_t = (X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) = (X_1^*, \dots, X_Q^*) / [x_t = \dot{x}_t, \dots, x_{t-N+1} = \dot{x}_{t-N+1}] \quad (3.24)$$

de manera que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N}^{Q, N+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{1/t}^Q \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} g^Q \quad (3.25)$$

y en consecuencia:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{1, \dots, T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \mathbf{X}^* \quad (3.26)$$

siendo en este caso $\tilde{\mathbf{X}}_{1,\dots,T}$ la mixtura uniforme de las distribuciones condicionales $\mathbf{X}_t = (X_{1/t}, \dots, X_{Q/t})$, $g^Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$ la densidad de \mathbf{X}^* y $g_{1/t}^Q = g_{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N}^{Q, N+1} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$ la densidad de la distribución condicional \mathbf{X}_t en el punto $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$.

Esta extensión permite establecer la Proposición 3.2.

Proposición 3.2. *Sea $\{x_t\} = \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ un proceso estocástico estacionario y ergódico con soporte⁹ en \mathbb{R} , con distribución incondicional Q -variante $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_Q^*)$, de densidad $g^Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$, y distribución condicional en t \mathbf{X}_t , de densidad $g_{1/t}^Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$, cumpliendo que:*

$$\mathbf{X}_t = (X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) = (X_1^*, \dots, X_Q^*) / [x_t = \dot{x}_t, \dots, x_{t-N+1} = \dot{x}_{t-N+1}] \quad (3.27)$$

para $N \in \mathbb{N}$ fijo y $\dot{x}_{t-s} \in \mathbb{R}, s = 0, \dots, N-1$.

Entonces, si el HR de la unidad, $\{h_t\}$, viene dado por $h_t = N(x_t)$, se cumple que:

$$\Pi_{[1\ T]}^Q \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} F^* = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_s^*)) \quad (3.28)$$

con $\Pi_{[1\ T]}^Q$ generada a partir de una realización $\{\dots, \dot{x}_{-2}, \dot{x}_{-1}, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots\}$ de $\{x_t\}$.

Demostración.

Sea la función $\tilde{\mathcal{F}}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \quad \mathbb{R}^Q &\rightarrow (0\ 1) \\ (x_1, \dots, x_Q) &\rightarrow 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(x_s)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por la expresión (3.26) y por la continuidad de $\tilde{\mathcal{F}}$ se cumple que:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,\dots,T}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^*) \quad (3.30)$$

Puesto que (i) aplicar $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre la mixtura $\tilde{\mathbf{X}}_{1,\dots,T}$ equivale a aplicar $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre cada componente \mathbf{X}_t , y (ii) se cumple que:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{X}_t) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_{s/t})) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - Y_{s/t}) = W_t^Q \quad (3.31)$$

se concluye la condición del enunciado:

$$\Pi_{[1\ T]}^Q = W_t^Q \circ \mathcal{I}_{[tl\ tu]} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,\dots,T}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^*) = F^* \quad (3.32)$$

⁹ El resultado puede extenderse de forma inmediata a cualquier abierto A , $A \subset \mathbb{R}$.

dado que $\Pi_{[1\ T]}^Q$ es la mixtura uniforme de las distribuciones condicionales W_t^Q generada a partir de una realización $\{\dots, \dot{x}_{-2}, \dot{x}_{-1}, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots\}$ de $\{x_t\}$. ■

La Proposición 3.3 generaliza el resultado precedente para una distribución condicional cualquiera dependiente de un proceso multivariante estacionario de dimensión finita.

Proposición 3.3. *Sea $\{x_t\} = \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ un proceso estocástico estacionario y ergódico con soporte¹⁰ en \mathbb{R} , con distribución incondicional Q -variante $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_Q^*)$, de densidad $g^Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$, y con distribución condicional Q -variante $\mathbf{X}_t = (X_{1/t}, \dots, X_{Q/t})$, de densidad $g_{1/t}^Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^Q)$, cumpliendo que:*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}^* / [z_t^1 = \dot{z}_t^1, \dots, z_t^N = \dot{z}_t^N] \quad (3.33)$$

con $\mathbf{z}_t = (z_t^1, \dots, z_t^N)$ un proceso estocástico estacionario y ergódico con soporte⁹ en \mathbb{R} y $\dot{z}_t^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$.

Entonces, si el HR de la unidad, $\{h_t\}$, viene dado por $h_t = N(x_t)$, se cumple que:

$$\Pi_{[1\ T]}^Q \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} F^* = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_s^*)) \quad (3.34)$$

con $\Pi_{[1\ T]}^Q$ generada a partir de una realización $\{\dots, \dot{z}_{-2}, \dot{z}_{-1}, \dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots\}$ de $\{\mathbf{z}_t\}$.

Demostración.

La demostración se deriva de forma inmediata de los resultados precedentes, siendo en este caso $g_{\dot{z}_1^1, \dots, \dot{z}_N^N}^{Q, \mathbf{z}}$ la función de densidad Q -variante de $\mathbf{X}^* / [z_t^1 = \dot{z}_t^1, \dots, z_t^N = \dot{z}_t^N]$.

Bajo la condición del enunciado, $g_{\dot{z}_1^1, \dots, \dot{z}_N^N}^{Q, \mathbf{z}} = g_{1/t}^Q$, por lo que se cumple entonces que:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_{\dot{z}_1^1, \dots, \dot{z}_N^N}^{Q, \mathbf{z}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g_t^Q \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} g^Q \quad (3.35)$$

con g^Q la función de densidad de \mathbf{X}^* .

Por tanto, puede aplicarse el razonamiento seguido en la demostración de la Proposición 3.2. para concluir que:

$$\Pi_{[1\ T]}^Q \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} F^* = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_s^*)) \quad (3.36)$$

¹⁰ El resultado puede extenderse de forma inmediata a cualquier abierto A , $A \subset \mathbb{R}$.

con $\Pi_{[1\ T]}^Q$ generada a partir de una realización $\{\dots, \dot{z}_{-2}, \dot{z}_{-1}, \dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots\}$ de $\{z_t\}$ en vez de una realización $\{\dots, \dot{x}_{-2}, \dot{x}_{-1}, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots\}$ de $\{x_t\}$. La Proposición 3.2. es, de hecho, un caso particular de ésta tomando como z_t el dado por $z_t^j = x_{t-j+1}$.

■

Los resultados precedentes evidencian que la distribución “incondicional” que se deriva del modelo propuesto queda bien definida y representa exclusivamente el riesgo de incumplimiento observado en la ventana de cálculo que la determina, sea estacionario o no el HR de la unidad. Es, por ello, una distribución “incondicional” *condicionada* a su ventana de cálculo, de forma que el problema de reflejar un determinado ciclo económico en F se transforma en el de elegir un conjunto de componentes W_t que lo represente adecuadamente. Este proceso de selección facilita, además, el análisis de la influencia de la ventana de cálculo en las métricas el riesgo, puesto que se reduce a medir el efecto de incluir o excluir de la misma distribuciones condicionales W_t .

3.4.2.3. Sustento en las distribuciones condicionales

Como mixtura de las componentes W_t , $t = 1, \dots, T$, Π tiene un claro sustento en las distribuciones condicionales. Supone una aproximación condicional a la medición “incondicional” que recoge el comportamiento del riesgo de incumplimiento a lo largo de la ventana de cálculo a través de la consideración explícita de su evolución temporal. Ésta se captura a través de la variable \mathcal{I} y las componentes W_t , que confieren a la realización de un valor de Π la ya mencionada mezcla de simulación histórica y estocástica. La primera permite integrar todos los estados de la economía que han influido sobre la serie de HR a lo largo de la ventana sin necesidad de explicitar una distribución, mientras que las segundas, indexadas por el periodo temporal, recogen toda una distribución de PD condicionales, en vez de limitarse a la que se deriva de la senda observada, como muestra la Figura 3.2.

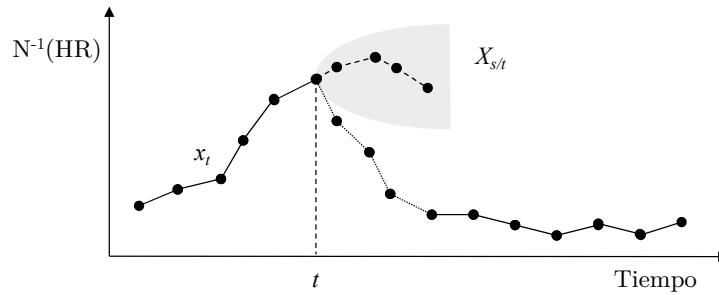


Figura 3.2: Senda realizada (línea respunteada) y distribución de sendas condicionales, junto con la senda esperada (línea discontinua). En un período de fuerte cambio económico la senda realizada y la esperada pueden distinguirse notablemente.

Cabe señalar que la consideración de las distribuciones condicionales también otorga carácter estructural al modelo propuesto, puesto que la distribución para el conjunto de la ventana se obtiene a partir de fuentes de incertidumbre primitivas, las distribuciones

condicionales W_t . Éstas pueden interpretarse como las distribuciones “incondicionales” asociadas a ventanas temporales de un único periodo. La distribución “incondicional” se construye entonces de forma modular, añadiendo o eliminando las componentes W_t de interés. Ello permite tratar con facilidad ventanas de cálculo distintas a la de “ciclo económico completo”, como por ejemplo una ventana de “recesión económica” formada por periodos de desempeño económico adverso. El modelo propuesto permite, incluso, considerar ventanas temporales no conexas.

Además, la estructura de mixtura de distribuciones condicionales (i) dota a Π de todas las propiedades analíticas de las mixturas, como las referidas a la media, varianza, función de densidad y de distribución, que pueden expresarse en términos de las de las componentes W_t , (ii) identifica, informalmente, la distribución para el conjunto de la ventana con una “media” de las distribuciones condicionales, lo que proporciona una interpretación económica más clara del modelo, (iii) facilita el cálculo de métricas de riesgo “incondicionales” para horizontes consecutivos de forma inmediata, como muestra la Figura 3.3, y (iv) permite abordar dos líneas de trabajo centrales a lo largo de este trabajo:

- El análisis, teórico y empírico, de las diferencias entre la aproximación estática y la dinámica y la influencia que la ventana de cálculo, la dinámica del HR y la propia evolución de las distribuciones condicionales durante el ciclo económico tienen en las métricas de riesgo “incondicionales”, como sucede en el Capítulo 4 y en el Capítulo 5.
- El análisis y proposición de soluciones a problemas relevantes asociados a la medición del riesgo de incumplimiento, como son la determinación del nivel de cobertura con el que calcular el VaR, $\eta = \eta_u$, el cálculo de las métricas de riesgo por simulación Monte Carlo y el reparto del capital, como sucede en el Capítulo 5, en el Capítulo 6 y en el Capítulo 7, respectivamente.

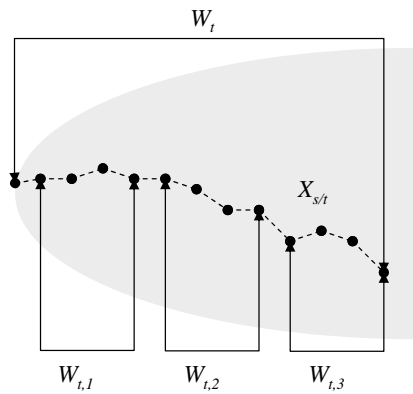


Figura 3.3: Una única distribución de sendas, en el ejemplo de longitud 12, puede dar lugar a tres distribuciones condicionales W_t consecutivas a horizonte $Q = 4$, $W_{t,1}$, $W_{t,2}$ y $W_{t,3}$, que a su vez dan lugar a tres distribuciones “incondicionales” consecutivas, Π_1 , Π_2 y Π_3 .

3.4.3. Estimación y simulación

La identificación de Π equivale, como se ha señalado previamente, a la identificación de la dinámica subyacente, que constituye su “metaparámetro”. El ajuste de un modelo econométrico puede resultar más complejo que el de una distribución estática, en especial si ésta es paramétrica. No obstante, bajo el modelo propuesto pueden considerarse distintas ventanas u horizontes de cálculo sin necesidad de reidentificar la dinámica subyacente, puesto que es suficiente con modificar la longitud de las sendas condicionales o el grupo de componentes W_t que forman Π . Esta propiedad facilita la implementación y mantenimiento del modelo y lo distingue de la aproximación estática, donde la consideración de distintos horizontes o ventanas de cálculo dentro de la ventana de observación conlleva la reidentificación de la distribución F .

Las propiedades estadísticas del modelo dinámico, y en especial su capacidad explicativa, pueden influir en las métricas de riesgo. En particular, es claro que una menor varianza de las distribuciones condicionales $X_{s/t}$ conduce a una menor varianza de W_t y con ello de Π , lo que implica una menor cifra de capital. Este efecto (i) supone una fuente de riesgo de modelo y (ii) puede generar, bajo ciertas condiciones, incentivos inadecuados hacia la sobreparametrización de la dinámica subyacente, con el fin de reducir la varianza de las innovaciones. Ambos puntos aconsejan considerar el proceso de ajuste de la dinámica subyacente como un punto sensible en el proceso de validación del modelo¹¹.

En cuanto al proceso de simulación Monte Carlo, la obtención de una realización de Π requiere de dos pasos:

1. Simular \mathcal{I} y determinar la componente de la mixtura W_t .
2. Simular un valor de W_t , lo que conlleva generar las distribuciones condicionales $X_{s/t}$, $s = 1, \dots, Q$, y tomar $W_t = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_{s/t}))$.

Cabe señalar que (i) si el número total de simulaciones, G , es suficientemente grande, puede prescindirse de la simulación de \mathcal{I} en virtud de la Ley de los Grandes Números y generar en su lugar G/T valores de cada componente, (ii) el número de innovaciones a simular depende del tipo de dinámica subyacente escogida y, en particular, de la inclusión o no de variables explicativas¹², y (iii) este esquema representa la aplicación estándar de la simulación de Monte Carlo a la distribución Π , siendo posible, con el fin de mejorar la precisión de la estimación, considerar esquemas alternativos como los explorados en el Capítulo 6.

¹¹ Diversos trabajos han estudiado el posible arbitraje que las entidades financieras pueden llevar a cabo en el cálculo de los requerimientos propios, en especial en el ámbito del capital regulatorio (*regulatory capital arbitrage*). Por ejemplo, [32] en el ámbito de la PD o [151] en el de la LGD. [100] alerta de su existencia ya en el marco de Basilea I.

¹² Por ejemplo, si x_t sigue un modelo ARIMA es necesario simular Q innovaciones para generar una realización de las Q distribuciones condicionales $X_{s/t}$.

3.4.4. Inclusión de variables macroeconómicas en la dinámica subyacente

El modelo propuesto puede hacer uso de variables explicativas macroeconómicas o de cualquier otro tipo a partir de su inclusión en la dinámica subyacente. Como se señaló en el apartado 2.4.4, la consideración de variables macroeconómicas resulta habitual en la literatura y ofrece ventajas apreciables en términos de sentido económico, información adicional sobre la cartera y su relación con el ciclo¹³, así como sinergias con el modelo de análisis de escenarios, como se discute a continuación. No obstante, y como apunta [106], el empleo de variables macroeconómicas aumenta la complejidad del modelo, en especial si es necesario ajustar a éstas una dinámica propia.

Por ello, la inclusión de variables macroeconómicas en la dinámica subyacente del modelo depende del fin y usos que la entidad desee dar a éste. Por ejemplo, si el objetivo es conocer qué clase de escenarios macroeconómicos dan lugar a los valores de pérdida más elevados, puede resultar conveniente su incorporación, mientras que si el fin del modelo es la mera estimación de la cifra de capital económico, una representación de la dinámica subyacente sin variables macroeconómicas puede ser suficiente. Así sucede, de hecho, en los ejercicios empíricos efectuados a lo largo de este trabajo, en los que se han empleado modelos sin variables macroeconómicas puesto que (i) el objeto principal de este trabajo no es el análisis del riesgo de incumplimiento en términos de variables indicadoras de coyuntura, sino la visión condicional de éste, y (ii) con ello se centra el análisis en el propio modelo de distribución propuesto, Π , y no en la construcción econométrica subyacente.

En todo caso, si se opta por incluir variables macroeconómicas en la dinámica, el modelo propuesto puede emplearse para realizar ejercicios de análisis de escenarios y stress test (i) tanto sobre la pérdida esperada como en el resto de métricas de riesgo, y (ii) a nivel condicional, lo que supone la práctica habitual, e incluso también a nivel “incondicional”, en cuyo caso será necesario definir el ejercicio de stress sobre cada una de las distribuciones condicionales W_t que forme Π . Además, el modelo propuesto facilita el empleo conjunto de ambas herramientas, modelo de pérdida y análisis de escenarios, lo que, como señala [21], resulta imprescindible para obtener resultados consistentes.

3.5. Aplicación a nivel cartera

3.5.1. Consideraciones generales

El modelo propuesto puede aplicarse de forma inmediata al caso general de una cartera crediticia formada por varias unidades de riesgo. En tal caso, las distribucio-

¹³ Por ejemplo, y como discute [124], la determinación, fijado η , del subespacio que forman las variables macroeconómicas para las que la pérdida asociada alcanza dicho VaR.

nes $X_{s/t}$, $Y_{s/t}$, W_t y Π son multivariantes de dimensión N , $\mathbf{X}_{s/t} = (X_{s/t}^1, \dots, X_{s/t}^N)$, $\mathbf{Y}_{s/t} = (Y_{s/t}^1, \dots, Y_{s/t}^N)$, $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$ y $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$. De esta forma, Π^j es la mixtura uniforme de las componentes W_t^j , con $W_t^j = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - Y_{s/t}^j) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_{s/t}^j))$. La Figura 3.4 representa el modelo propuesto en el caso multivariante.

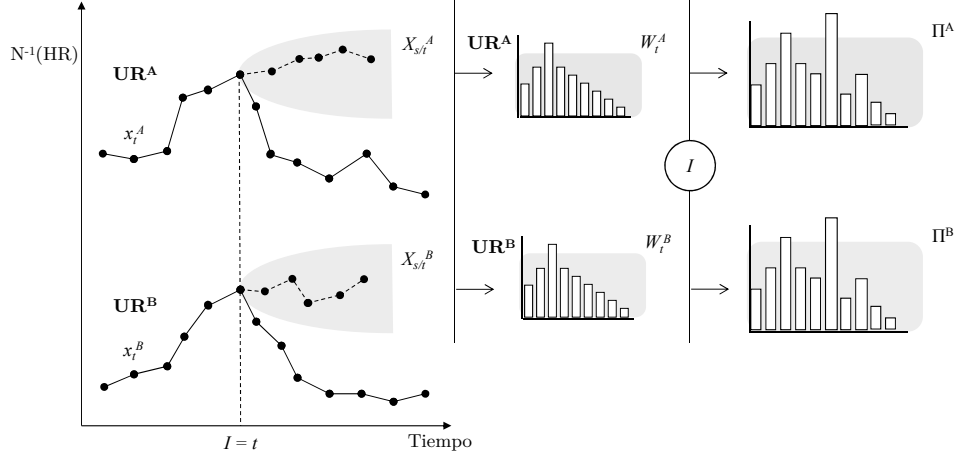


Figura 3.4: La aplicación a nivel cartera del modelo de distribución de PD propuesto es similar al caso univariante salvo en la consideración de una dinámica subyacente multivariante.

Al ser \mathcal{I} común a todas las unidades de riesgo, las N distribuciones condicionales $X_{s/t}^j$ lo son a la misma información disponible, por lo que parte de la dependencia entre las series de HR, aquella que viene dada por la relación de largo plazo, se captura por medio del propio “pasado común” en cada periodo de la ventana si la longitud de ésta es suficientemente elevada.

Esta propiedad es consecuencia de la mezcla de simulación histórica y estocástica que también se da a nivel multivariante y resulta notable puesto que (i) permite recoger parte de la dependencia entre unidades sin necesidad de asumir ninguna estructura particular, es decir, de forma no paramétrica, (ii) es coherente con la posibilidad de que $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^N)$ sea no estacionario, ya que sólo se establece explícitamente la relación de dependencia entre unidades a nivel condicional a través de las componentes $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$, y (iii) reduce el riesgo de modelo y, sobre todo, hace de la identificación de la relación de largo plazo entre las series de HR una tarea menos crítica.

En lo que respecta a la dinámica multivariante subyacente, ésta (i) supone también el “metaparámetro” de $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$ y determina la dependencia de corto plazo entre unidades, es decir, la dependencia entre cada par de distribuciones W_t^j y W_t^k , para t fijo, (ii) no se ve restringida en su formulación, y (iii) su identificación se lleva

a cabo a partir de la matriz de datos Λ^x , con:

$$\Lambda^x = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_1^2 & \cdots & \dot{x}_1^N \\ \dot{x}_2^1 & \dot{x}_2^2 & \cdots & \dot{x}_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_T^1 & \dot{x}_T^2 & \cdots & \dot{x}_T^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{-1}(\dot{h}_1^1) & N^{-1}(\dot{h}_1^2) & \cdots & N^{-1}(\dot{h}_1^N) \\ N^{-1}(\dot{h}_2^1) & N^{-1}(\dot{h}_2^2) & \cdots & N^{-1}(\dot{h}_2^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{-1}(\dot{h}_T^1) & N^{-1}(\dot{h}_T^2) & \cdots & N^{-1}(\dot{h}_T^N) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

siendo \dot{h}_t^j la realización de $\mathbf{h}_t = (h_t^1, \dots, h_t^N)$ en el periodo t para la unidad j .

Cabe señalar que la implementación y mantenimiento del modelo en el caso multivariante puede resultar notablemente más complejo que en el caso univariante. Así, por un lado, una segmentación granular, con un elevado número de unidades de riesgo, puede dificultar o perjudicar la identificación del modelo, sobre todo en ventanas de escasa longitud. Por otro, y en la medida en que la dinámica incorpore interacciones entre los procesos h_t^j , $j = 1, \dots, N$, el cambio en la serie de HR de una unidad puede requerir la reidentificación de todo el modelo. Este es un problema relevante en la práctica puesto que la obtención de las series internas de HR está sujeta a eventuales problemas en la calidad de la información, variaciones e intervenciones en las fuentes de datos o cambios en la propia definición de incumplimiento.

Ambos puntos sugieren ponderar criterios econométricos y prácticos en la elección de la dinámica subyacente, éstos últimos vinculados al tamaño de la cartera, así como a las variaciones previstas en su composición. A continuación se discuten dos ejemplos de dinámica subyacente en estos términos.

3.5.2. Ejemplos de dinámica subyacente multivariante

3.5.2.1. Dinámica subyacente factorial

Como se señaló en el apartado 2.4.4, el uso de estructuras factoriales es habitual en los modelos de independencia condicional. En una aproximación dinámica, como es el caso del modelo de distribución propuesto, esta aproximación supone considerar un *modelo factorial dinámico*, cuyas principales características se revisan brevemente en el Apéndice C. Ello supone expresar $\mathbf{x}_t = N^{-1}(\mathbf{h}_t)$ como¹⁴:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{P} \mathbf{f}_t + \mathbf{e}_t \quad (3.38)$$

$$\Phi(\mathbf{B}) \mathbf{f}_t = \mathbf{d} + \Theta(\mathbf{B}) \mathbf{a}_t \quad (3.39)$$

donde $\mathbf{f}_t = (f_t^1, \dots, f_t^{N^*})$ es el vector de factores latentes, de dimensión N^* , $N^* \ll N$, y $\mathbf{e}_t = (e_t^1, \dots, e_t^N)$, de dimensión N , es el vector de componentes específicos, que puede contar o no con dinámica propia. \mathbf{P} es la matriz de pesos que relaciona los primeros

¹⁴ El modelo factorial dinámico que se considera a lo largo de este trabajo es el lineal de coeficientes fijos e innovaciones normales, que constituye la formulación habitual.

con las series transformadas de HR, \mathbf{d} es un vector de constantes y $\Phi(\mathbf{B})$ y $\Theta(\mathbf{B})$ son los polinomios de retardos en \mathbf{f}_t y \mathbf{a}_t , respectivamente.

La dinámica de los factores latentes puede ser no estacionaria y, en el caso de que \mathbf{e}_t sea ruido blanco, recoge enteramente la dinámica de \mathbf{x}_t . Entre otros, [98], [107], [54] y [105] consideran dinámicas de corte factorial en la modelización del riesgo de incumplimiento.

El empleo de un modelo factorial como dinámica subyacente resulta atractivo por varios motivos: (i) permite explicitar tendencias comunes sin necesidad de recurrir a variables explicativas, en especial en el caso de que las series presenten un comportamiento no estacionario pero cointegren, (ii) puesto que los factores latentes pueden filtrarse una vez identificado éste, el uso del modelo provee de información adicional relevante que puede aprovecharse en otras aplicaciones, (iii) en caso de que se desee vincular explícitamente las series de HR con variables macroeconómicas, por ejemplo, para análisis de escenarios, la incorporación de las segundas en la dinámica de \mathbf{x}_t puede simplificarse si se articula exclusivamente a través de la componente factorial, y (iv) permite representar el carácter jerárquico que habitualmente adopta la segmentación en unidades de riesgo, puesto que pueden definirse estructuras bajo las que los factores latentes responden a ejes como el geográfico o el sectorial, como representa la Figura 3.5.

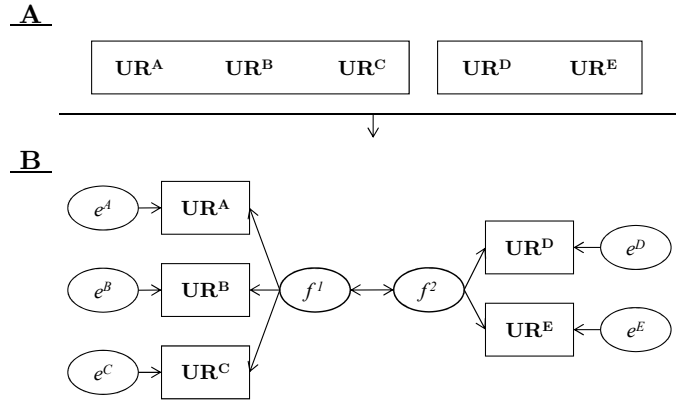


Figura 3.5: En (A), la cartera se compone de cinco unidades de riesgo provenientes de dos países, cada uno con 3 (UR^A , UR^B y UR^C) y 2 (UR^D y UR^E) unidades de riesgo respectivamente. En (B), la estructura anterior se recoge por medio de un modelo bifactorial, de forma que cada grupo se asocia a un factor y la dependencia entre unidades de distintos grupos viene dada exclusivamente por sus respectivos factores latentes, f^1 y f^2 , para los que es necesario definir una dinámica bivalente.

Cabe señalar, como muestra [107], que la separación de cada dinámica marginal en una componente sistémica y otra específica permite medir la intensidad relativa de cada una, lo que puede ser de utilidad a la hora de identificar qué unidades son más sensibles al ciclo económico. De hecho, es posible ir más allá del análisis planteado en este trabajo e identificar la componente factorial como la parte del riesgo de incumplimiento de la cartera no diversificable, mientras que las N componentes específicas de la dinámica multivariante representan la porción del riesgo de incumplimiento que sí pue-

de reducirse a través de una distribución de deudores adecuada y en número suficiente. Esta representación sugiere cierta analogía con los modelos de valoración de activos, como el CAPM (*Capital Asset Pricing model*) o el APT (*Arbitrage Pricing Theory*), en el sentido de exigir un rendimiento mayor al préstamo o crédito cuanto mayor sea el peso de la componente factorial en la dinámica subyacente de la unidad. En todo caso, conocer la influencia de los factores latentes en cada unidad supone información adicional de interés.

En lo que respecta a sus debilidades, el principal inconveniente de la aproximación factorial es su carácter restrictivo, ya que, en la práctica, puede ser inviable su ajuste en carteras heterogéneas o resultar poco operativo si debe recurrirse a un número de factores latentes elevado. Además, el hecho de que descansen en componentes no observables puede incrementar el riesgo de modelo debido a una identificación incorrecta de la dinámica.

3.5.2.2. Dinámica subyacente SUTSE

La formulación SUTSE (*Seemingly Unrelated Time Series Equations*), originalmente propuesta por [164] para el caso estático y adaptada a las series temporales por [90], consiste en una dinámica N -variante generada a partir de N dinámicas univariantes cuya dependencia se establece a través de la distribución multivariante de las innovaciones contemporáneas de cada modelo.

Por ejemplo, si el modelo univariante para la unidad j viene dado por:

$$x_t^j = \phi^j(\boldsymbol{\theta}_{t-1}^j; e_t^j) \quad (3.40)$$

entonces la dinámica SUTSE para el vector $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^N)$ puede formularse como¹⁵:

$$\begin{aligned} x_t^1 &= \phi^1(\boldsymbol{\theta}_{t-1}^1; e_t^1) \\ x_t^2 &= \phi^2(\boldsymbol{\theta}_{t-1}^2; e_t^2) \\ &\dots \\ x_t^N &= \phi^N(\boldsymbol{\theta}_{t-1}^N; e_t^N) \end{aligned} \quad (3.41)$$

con $\mathbf{e}_t = (e_t^1, \dots, e_t^N) \sim N((0, \dots, 0), \boldsymbol{\Sigma}^e)$ y siendo ϕ^j la forma funcional de la dinámica de la serie j , $\boldsymbol{\theta}_{t-1}^j$ un vector que recoge toda la información relevante disponible hasta el periodo $t-1$ y e_t^j la innovación de la dinámica j en el periodo t .

¹⁵Esta representación se corresponde con el caso en que cada dinámica univariante cuenta con una única fuente de excitación (una única innovación, e_t^j). No obstante, el desarrollo puede extenderse de forma inmediata al caso general en que $x_t^j = \phi^j(\boldsymbol{\theta}_{t-1}^j; \mathbf{e}_t^j)$, con \mathbf{e}_t^j el vector de innovaciones de x_t^j , de dimensión N^j , y \mathbf{e}_t el vector de innovaciones de \mathbf{x}_t , de dimensión $N \leq \sum_{j=1}^N N^j$. Ésta es, de hecho, la situación cuando se incluyen variables explicativas en la dinámica, que pueden ser comunes o no a todo el vector \mathbf{x}_t .

De esta forma, las sendas condicionales $X_{s/t}^j$ de cada unidad de riesgo se obtienen aplicando consecutivamente la dinámica de cada modelo univariante, con la única salvedad de que, fijado s , el vector de N innovaciones sigue una distribución multivariante potencialmente no esférica. La identificación de una dinámica SUTSE requiere ajustar N modelos univariantes más la modelización de la matriz de varianzas-covarianzas de las innovaciones, lo que en general resulta más sencillo que ajustar un modelo multivariante, en especial cuando N es elevado. En el caso habitual, ϕ^j adopta una expresión lineal, lo que facilita aún más la identificación.

[149], [128] y [161], entre otros, consideran la formulación SUTSE como una solución práctica a la complejidad de la identificación multivariante en la medición del riesgo de incumplimiento, aunque no profundizan en las ventajas que se derivan de su aplicación.

Entre ellas, cabe destacar que (i) permite tratar con carteras grandes y heterogéneas donde la especificación de una formulación estructural resulte inviable, (ii) puede emplearse, además de para integrar distintos modelos univariantes, para integrar distintos submodelos asociados a grupos de unidades, como representa la Figura 3.6, (iii) dota de modularidad al modelo de pérdida, puesto que la modificación de una dinámica marginal sólo requiere reidentificar el modelo univariante asociado y el modelo para la matriz de varianzas-covarianzas de las innovaciones, y (iv) en el caso del modelo propuesto, la formulación SUTSE aprovecha especialmente la combinación de simulación histórica y simulación estocástica que da lugar a una realización de Π , puesto que si la relación de dependencia de largo plazo entre las series se recoge adecuadamente a través de \mathcal{I} , la matriz de varianzas-covarianzas de las innovaciones univariantes contemporáneas puede resultar suficiente para capturar la dependencia restante, es decir, la de corto plazo.

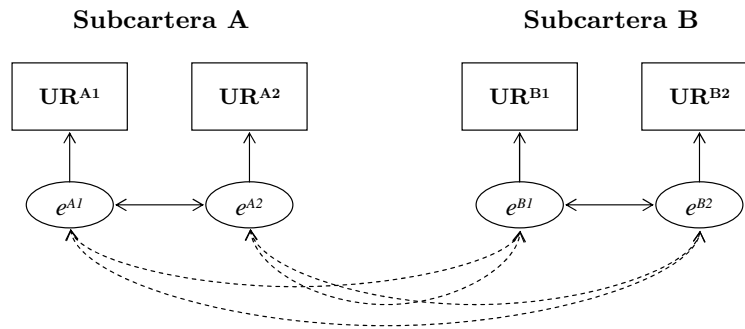


Figura 3.6: Tanto el par de unidades (UR^{A1}, UR^{A2}) como el par (UR^{B1}, UR^{B2}) cuentan con su propia dinámica subyacente bivalente. La aproximación SUTSE puede integrarlas si se definen las covarianzas entre los pares de innovaciones (e^{A1}, e^{B1}) , (e^{A1}, e^{B2}) , (e^{A2}, e^{B1}) y (e^{A2}, e^{B2}) . Ello permite encontrar un compromiso entre la necesidad de contemplar formulaciones más complejas en determinados segmentos o países, y el coste de extenderlas al conjunto de la cartera.

El principal inconveniente de la aproximación SUTSE es que supone una dinámica restringida, en la que las posibles interacciones entre series se capturan de forma indirecta-

ta a través de las propias dinámicas univariantes y de la matriz de varianzas-covarianzas de sus innovaciones. Por ello, puede resultar ineficiente, es decir, puede generar distribuciones condicionales $\mathbf{X}_{s/t} = (X_{s/t}^1, \dots, X_{s/t}^N)$, $s = 1, \dots, Q$, con una varianza mayor que la correspondiente a un modelo que recoja explícitamente las interacciones entre series.

Esta potencial ineficiencia de la dinámica conlleva mayor varianza de W_t^j y Π^j y, en consecuencia, la sobrestimación de las métricas de riesgo sensibles a ella, como el capital. Este efecto se acentúa si existe cointegración entre las series, en cuyo caso la dinámica SUTSE puede soslayar la relación de largo plazo, infraestimando la dependencia entre las unidades. No obstante, debe tenerse en cuenta que (i) a nivel univariante la ineficiencia puede considerarse *conservadora*, (ii) las distribuciones condicionales $X_{s/t}$ que se emplean para generar un valor de las distribuciones condicionales W_t^j lo son a corto plazo, es decir, para valores bajos de s , por lo que cabe esperar un impacto moderado, y (iii) siempre es posible instrumentalizar la relación cointegrante a través de variables macroeconómicas, pudiéndose emplear entonces la formulación SUTSE para la dependencia entre dichas variables y la dinámica residual de cada serie de HR.

Capítulo 4

Análisis empírico del riesgo de incumplimiento

4.1. Introducción

En este capítulo se efectúan tres análisis empíricos relativos al modelo de distribución de PD propuesto en el capítulo anterior, II. Con ellos se pretende profundizar, con base en datos reales, en las cuestiones planteadas en el Capítulo 3: la diferencia entre el enfoque dinámico y el estático, la influencia de la ventana temporal en la medición de “ciclo económico completo” y la importancia de la dinámica subyacente en la dependencia entre unidades y en las métricas de riesgo, individuales y agregadas.

La estructura del capítulo es la siguiente: en el segundo apartado se presentan las series de HR y los modelos dinámicos que sustentan el análisis. En el tercero se expone la metodología seguida en las pruebas y en los apartados cuarto, quinto y sexto se presentan y discuten los resultados obtenidos en cada una de ellas: (i) comparación entre V , la distribución de Vasicek, y II, la distribución propuesta en el apartado 3.3, (ii) influencia de la ventana de cálculo en las métricas de riesgo, y (iii) influencia de la ventana de cálculo y la dinámica subyacente en las métricas de riesgo agregadas.

4.2. Series de hazard rates y modelos econométricos empleados

4.2.1. Series de hazard rates

Como aproximación al HR se han considerado seis series trimestrales norteamericanas de ratio, en saldo, de *charge-off*. Todas ellas se han obtenido de la base pública

del FDIC¹ (*Federal Deposit Insurance Corporation*), con una ventana temporal de 20 años, desde 1991Q1 hasta 2010Q4. Las series seleccionadas son Hipotecas (*1-4 Family Residential Real Estate Loans*), Empresas (*Commercial & Industrial Loans to U.S. Addressees*), Tarjetas (*Credit Cards*), Consumo (*Other Loans to Individuals*), Resto (*All Other Loans*) y Lease² (*Lease Financing Receivables*).

Estas series se han considerado preferibles a las provenientes de otras fuentes alternativas, como agencias de calificación u organismos supervisores de otros países, por su carácter público, su condición de flujo (y no de stock) y el hecho de que cubren la clase de activos sujetos a riesgo de incumplimiento con los que cuenta la banca comercial. Así, por ejemplo, no se publican para el caso español series similares.

En lo que respecta a la definición de la serie, la declaración de *charge-off* para un derecho de cobro es obligatoria para las entidades financieras norteamericanas según normativa federal, y debe realizarse a los 120 (préstamos) ó 180 (créditos) días desde la fecha de incumplimiento. Puede entenderse, por tanto, como un impago con una definición de incumplimiento a 120 ó 180 días, según el tipo de producto. Cuando sobre un préstamo o crédito se declara un *charge-off*, la entidad reconoce una pérdida para la que no renuncia al proceso de recobro hasta varios años después de la fecha de impago.

Estas series son similares a las empleadas en [141] y [143] y las consideraciones allí discutidas aplican aquí también. En particular, deben tenerse en cuenta los siguientes puntos:

- Cada serie se obtiene como el cociente entre el flujo bruto³ de activos clasificados como *charge-off* en el periodo dividido por el valor total de los activos existentes en dicho periodo.
- Son series en saldo y no en número, por lo que pueden verse afectadas por la concentración, como se señaló en el apartado 2.4.5. No obstante, al tratarse de series agregadas, el número de deudores es elevado, lo que mitiga este efecto y reduce el error de realización.
- Cada serie incorpora, por su carácter agregado, deudores con distintas PD. Deben entenderse, por tanto, como series de HR representativas de cada tipo de producto.
- Las series han sido desestacionalizadas y corregidas de valores atípicos para mitigar efectos contables y facilitar la modelización.
- Están sujetas a las particularidades del sistema financiero norteamericano. En particular, cabe destacar el papel de las garantías: éstas se exigen habitualmente y el *charge-off* se determina como la parte del préstamo no cubierto por las

¹ Puede encontrarse más información en <http://www.fdic.gov/>.

² Operaciones de arrendamiento financiero. Por simplicidad, se conserva la voz inglesa Lease.

³ Es decir, no neteado de recuperaciones de *charge-off* pasados.

mismas, lo que podría disminuir el nivel de la serie en algunas unidades. No obstante, esta potencial distorsión no resulta crítica a los efectos de este trabajo.

Estas series sustentan el análisis empírico posterior y el realizado en los siguientes capítulos.

La Tabla 4.1 detalla los principales estadísticos de las seis series, entre los que destaca la existencia de una única raíz unitaria en todas ellas y una significativa curtosis. La Figura 4.1. muestra sus histogramas, en los que se aprecia una morfología irregular en la mayoría de ellas, y la Figura 4.2 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR y su transformada por la inversa de la función de distribución de la Normal estándar, sobre la que se ajustan los modelos dinámicos subyacentes.

La Figura 4.3 y la Figura 4.4 representan todas las series en un mismo gráfico. En ambas se aprecia un marcado comportamiento cíclico que se acentúa en la Gran Recesión, de forma consistente con el severo deterioro económico padecido en esta crisis. Este comportamiento cíclico induce sobre las series una evolución similar, aunque con distinto grado de respuesta al ciclo, con la excepción de Hipotecas, en la que se manifiesta el “efecto garantía” comentado anteriormente. En todo caso, todas las series, también Hipotecas, presentan un fuerte incremento durante la Gran Recesión.

<i>Serie</i>	<i>Media</i>	<i>D.T.</i>	<i>Mín.</i>	<i>P25</i>	<i>Mediana</i>	<i>P75</i>	<i>Máx.</i>	<i>Curtosis</i>	<i>Asimetría</i>	<i>JB test</i>	<i>ADF test</i>
Hipotecas	0,0010	0,0015	0,0002	0,0003	0,0004	0,0007	0,0062	6,3558	2,1944	0,0010	0,9667
Empresas	0,0030	0,0018	0,0012	0,0015	0,0023	0,0044	0,0078	2,6919	0,8939	0,0133	0,3653
Tarjetas	0,0148	0,0044	0,0086	0,0121	0,0138	0,0157	0,0282	5,4294	1,5668	0,0010	0,8222
Consumo	0,0044	0,0016	0,0021	0,0035	0,0039	0,0051	0,0093	4,4639	1,2416	0,0016	0,7740
Resto	0,0017	0,0014	0,0004	0,0009	0,0013	0,0019	0,0077	9,7002	2,5192	0,0010	0,1569
Lease	0,0017	0,0009	0,0005	0,0010	0,0014	0,0024	0,0043	3,4416	1,0149	0,0075	0,2294

Tabla 4.1: Principales estadísticos para las series de HR. D.T, desviación típica. P25, percentil 25. P75, percentil 75. Para los test de Jarque-Bera (JB test) y Augmented Dickey-Fuller (ADF test) se presenta el p-valor.

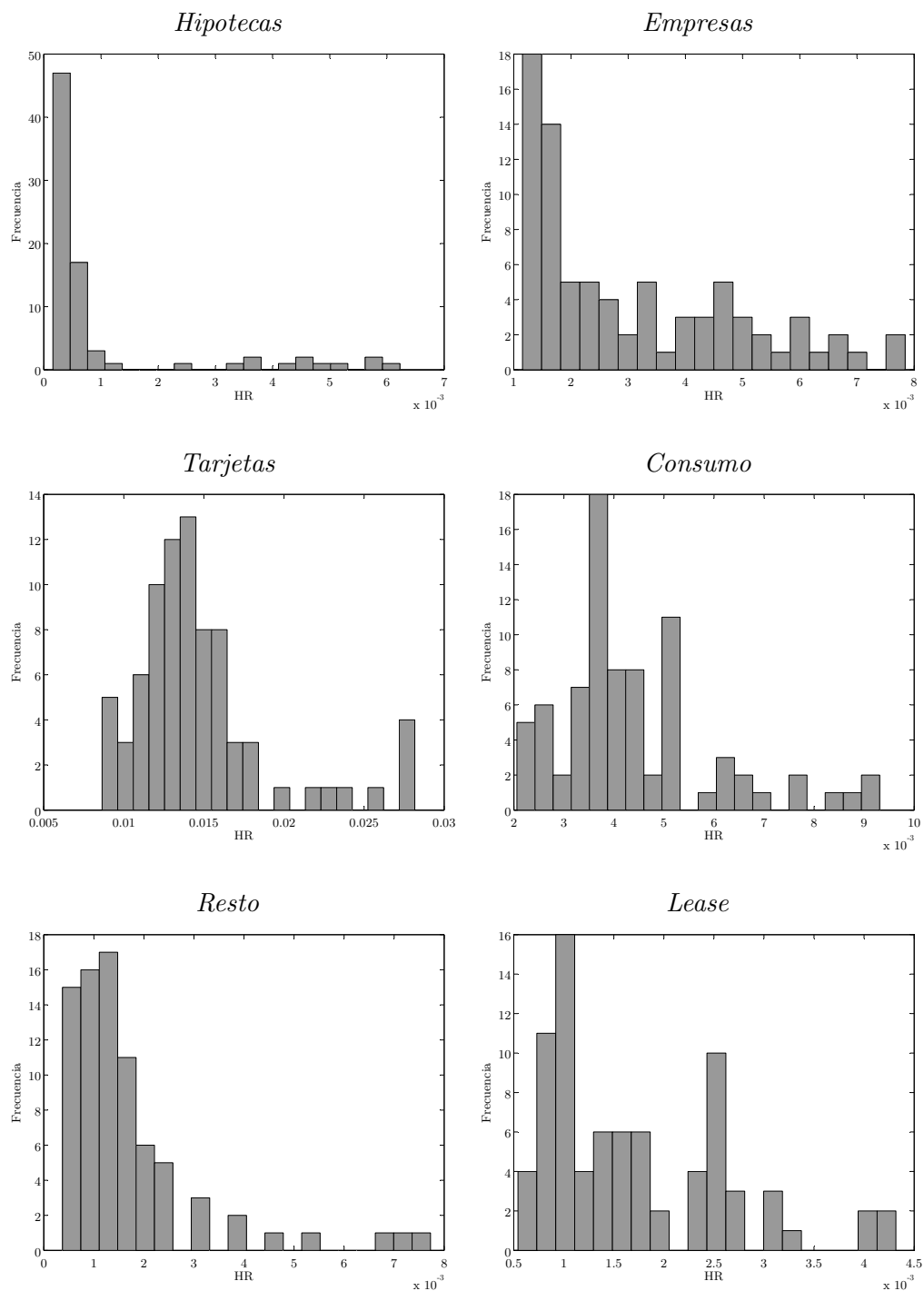


Figura 4.1: *Histograma de la serie de HR.*

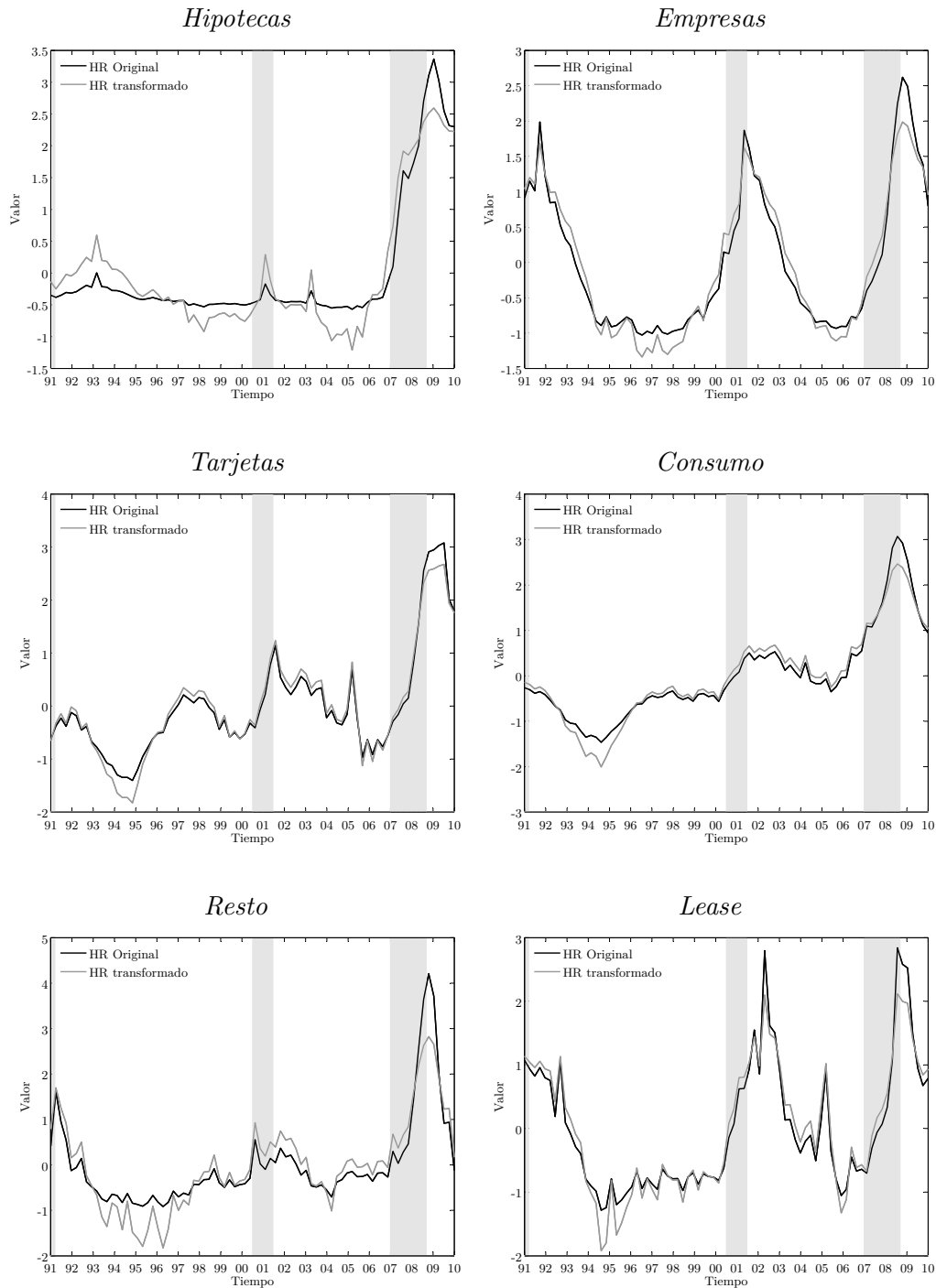


Figura 4.2: Series de HR y HR transformado por la inversa de la función de distribución de la Normal estándar. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER⁴.

⁴National Bureau of Economic Research, <http://www.nber.org/>.

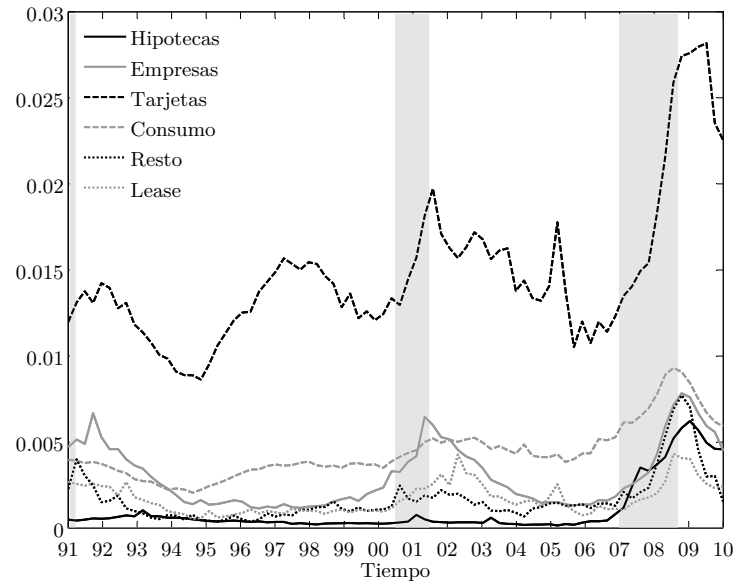


Figura 4.3: *Series de HR. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.*

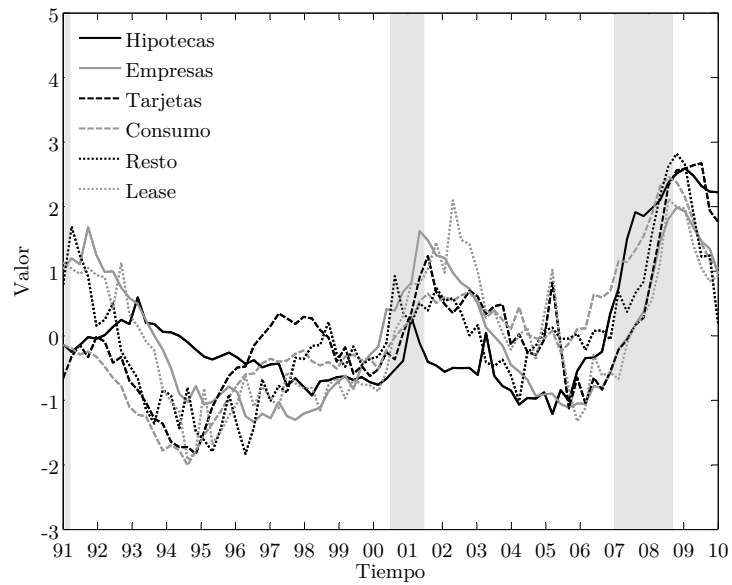


Figura 4.4: *Series de HR transformado por la inversa de la función de distribución de la Normal estándar. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.*

4.2.2. Modelos econométricos

4.2.2.1. Univariantes

A cada una de las series anteriores se le ha ajustado un modelo ARIMA univariante con una única raíz unitaria. Los seis modelos se detallan en la Tabla 4.2, en la que se observa que la estructura adicional a la raíz unitaria es, en general, débil.

4.2.2.2. Multivariantes

Se han considerado las dos formulaciones discutidas en el capítulo anterior para la dinámica multivariante subyacente: SUTSE y factorial.

En lo que respecta a la formulación SUTSE, la identificación es inmediata a partir de los modelos univariantes ARIMA y la matriz de varianzas-covarianzas de las innovaciones.

En el caso de la estructura factorial, se ha optado por un modelo unifactorial por su simplicidad e interpretación. Como se señaló en el apartado 3.5.2, ello implica expresar cada serie como combinación lineal de un factor latente, común a todas ellas, y un factor específico, diferente para cada serie. La Tabla 4.3 detalla el modelo. Se ha identificado un modelo ARIMA(1,1,0) para el factor latente, mientras que para los seis componentes específicos se ha optado por una dinámica AR(1). La relación entre cada serie y el factor latente cuenta con término constante y para la estimación se ha empleado la formulación en espacio de los estados a través del software econométrico⁵ **E**⁴.

⁵ Puede encontrarse más información, incluido el propio software, en <http://www.ucm.es/info/icae/e4/>.

Unidad	ρ_1		ρ_2		θ_1		θ_2		$\widehat{\sigma}_a$	LBQ(1)	AIC	SBC
	$\widehat{\rho}_1$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\rho}_1}$	$\widehat{\rho}_2$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\rho}_2}$	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_1}$	$\widehat{\theta}_2$	$\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_2}$				
Hipotecas	-	-	0,2120	0,1070	-	-	-	-	0,0670	32,21	-2,44	-2,38
Empresas	0,7602	0,1137	-	-	0,4882	0,1456	-	-	0,0435	24,58	-3,25	-3,16
Tarjetas	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0359	32,52	-3,72	-3,69
Consumo	0,6230	0,1443	-	-	0,5208	0,2090	-0,2886	0,1183	0,0208	38,19	-4,69	-4,57
Resto	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0869	13,41	-1,98	-1,95
Lease	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0712	14,68	-2,37	-2,34

Tabla 4.2: Modelos univariantes ARIMA ajustados a las series de HR, $x_t^d = \rho_1 x_{t-1}^d + \rho_2 x_{t-2}^d - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t$, con $x_t^d = x_t - x_{t-1}$ y $V[a_t] = (\sigma_a)^2$. $\widehat{\beta}$, coeficiente estimado. $\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}}$, desviación típica estimada de $\widehat{\beta}$. LBQ(1), Ljung-Box Q test para el primer retardo. AIC, Criterio de Información de Akaike. SBC, Criterio de Información de Schwarz.

Unidad	α_0		α_1		ϱ_1		ρ_1		$\widehat{\sigma}_u$	$\widehat{\sigma}_a$	LBQ(1)
	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\sigma}_{\alpha_0}$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\sigma}_{\alpha_1}$	$\widehat{\varrho}_1$	$\widehat{\sigma}_{\varrho_1}$	$\widehat{\rho}_1$	$\widehat{\sigma}_{\rho_1}$			
Factor	-	-	-	-	0,6505	0,1014	-	-	0,0138	-	20,57
Hipotecas	0	-	1	-	-	-	0,9750	0,0214	-	0,0671	29,48
Empresas	3,5002	2,6813	2,0027	0,8623	-	-	0,9079	0,0476	-	0,0301	29,27
Tarjetas	1,4715	1,6062	1,1690	0,5163	-	-	0,9410	0,0421	-	0,0279	20,40
Consumo	0,0914	1,1221	0,8718	0,3583	-	-	0,9762	0,0187	-	0,0161	45,41
Resto	3,2632	2,7221	1,9954	0,8727	-	-	0,7277	0,0913	-	0,0734	21,69
Lease	2,5461	2,3894	1,7544	0,7668	-	-	0,5016	0,2051	-	0,0541	16,06

Tabla 4.3: Modelo unifactorial dinámico ajustado a las series de HR , $x_t^j = \alpha_0^j + \alpha_1^j f_t + e_t^j$, con $f_t^d = \varrho_1 f_{t-1}^d + u_t$, $f_t^d = f_t - f_{t-1}$, $e_t^j = \rho_1 e_{t-1}^j + a_t$, $V[u_t] = (\sigma_u)^2$ y $V[a_t] = (\sigma_a)^2$. $\widehat{\beta}$, coeficiente estimado. $\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}}$, desviación típica estimada de $\widehat{\beta}$. AIC (Criterio de Información de Akaike) = -19,69. SBC (Criterio de Información de Schwarz) = -18,98.

Se aprecian distintas intensidades de respuesta al factor latente, recogidas por el coeficiente α_1^j , lo que corrobora el distinto grado de sensibilidad al ciclo económico de las series de HR, puesto que el factor latente presenta una marcada evolución cíclica. En cuanto a los modelos específicos, todos ellos presentan un coeficiente para el retardo elevado, sobre todo Hipotecas y Consumo. Ello sugiere falta de cointegración entre las series y cuestiona por tanto la asunción de raíz unitaria capturada exclusivamente a través del factor latente⁶.

No obstante, cabe señalar que las series son parcialmente heterogéneas, puesto que (i) responden a productos distintos sujetos a diferentes normativas en lo que respecta a la declaración de *charge-off*, (ii) tienen carácter contable, lo que las hace vulnerables a intervenciones y genera cierto error de medida, y (iii) las propias entidades financieras reaccionan a la evolución del HR con políticas anticíclicas. Todo ello perjudica la estimación de una formulación factorial al distorsionar un potencial comportamiento de raíz unitaria común, que es el que se pretende recoger en el factor latente. En todo caso, las series de residuos no presentan autocorrelación apreciable y es evidente el comportamiento similar de todas las unidades al final de la ventana. Por ello, y puesto que el objetivo no es el propio ajuste del modelo, sino (i) ilustrar el funcionamiento de la formulación factorial como dinámica subyacente en el modelo de distribución propuesto, II, y (ii) estudiar el efecto sobre las métricas de riesgo de la consideración o no de una relación cointegrante entre las series de HR, el modelo unifactorial ajustado se considera apropiado.

Finalmente, en la Figura 4.5 se comparan, estandarizadas, cada una de las seis series con el factor latente filtrado, mientras que en la Figura 4.6 se representan, también estandarizadas, la serie del factor latente frente a la serie de crecimiento del PIB real (invertido para facilitar la comparación) y la Tasa de paro⁷. En ellas se observa (i) comportamiento afín entre la serie de HR y la del factor latente, salvo en Hipotecas, y (ii) similitud en la evolución del factor latente y las variables macroeconómicas. Además, los dos puntos anteriores se acentúan en la Gran Recesión, donde también el HR de Hipotecas se alinea con el factor latente y donde la relación de éste con las variables macroeconómicas es más estrecha.

⁶ La aceptación o refutación formal de esta hipótesis requiere de un análisis estadístico más prolijo, del que se prescinde para simplificar la exposición y por los motivos que se exponen a continuación.

⁷ Numerosos trabajos, como [98], [26], [104], [24] y [121], entre otros, han encontrado una relación significativa entre PIB y HR. En cuanto al desempleo, su influencia en las unidades de riesgo minoristas ha sido reportada por [28].

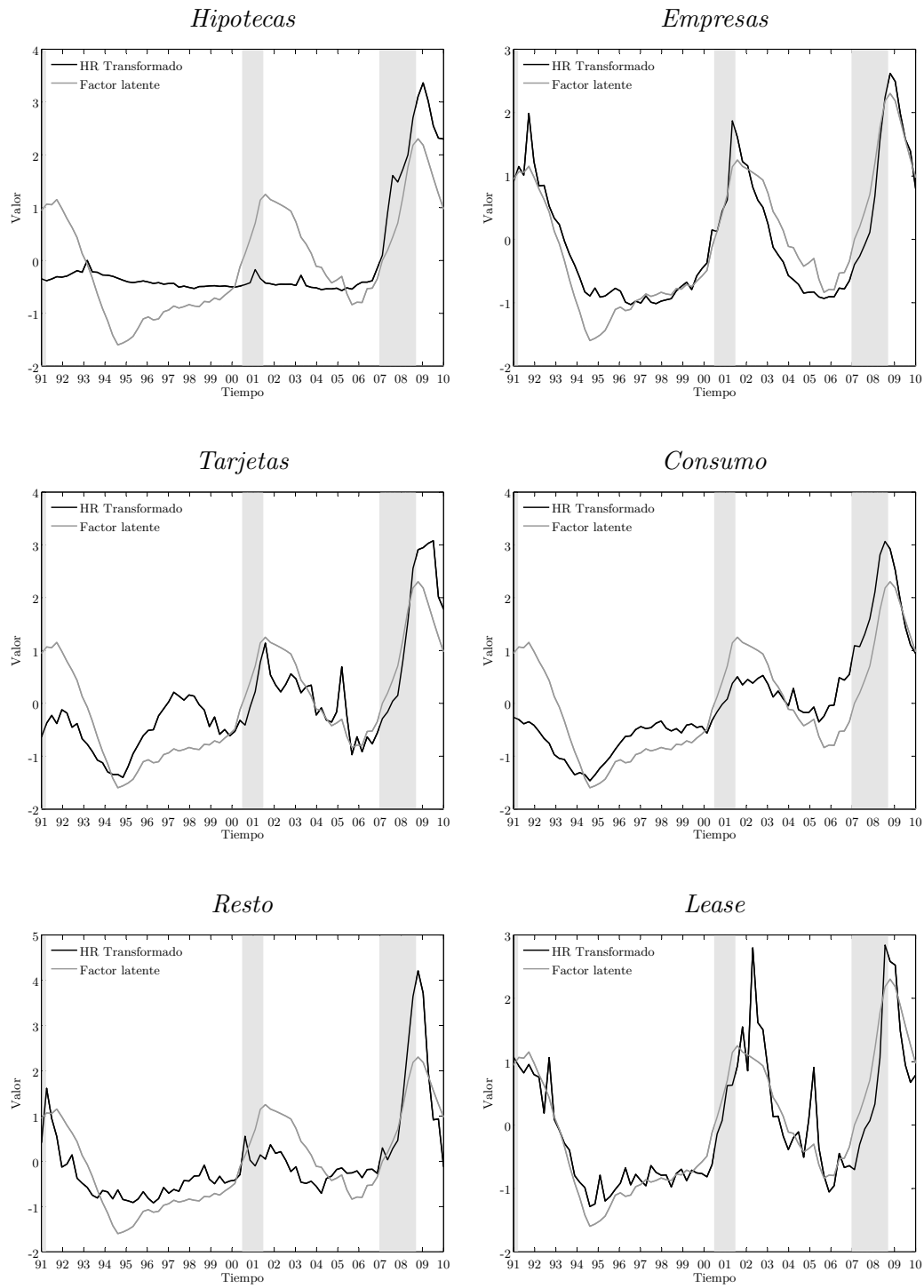


Figura 4.5: Series de HR transformado por la inversa de la función de distribución de la Normal estándar y factor latente. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

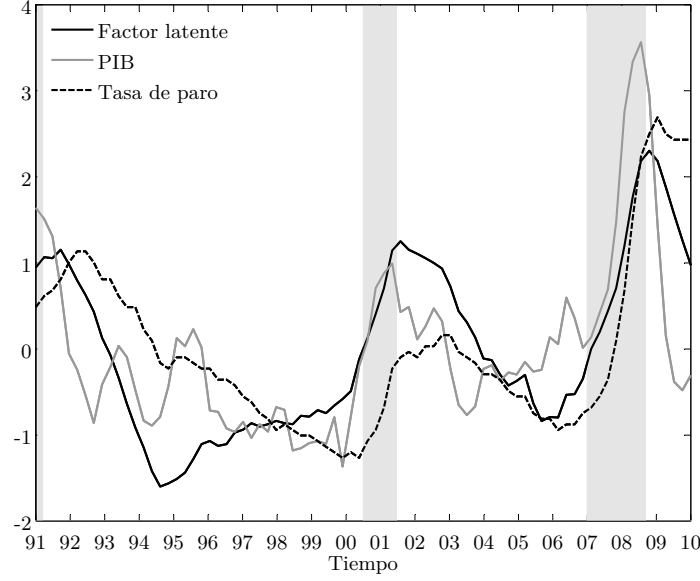


Figura 4.6: Series de factor latente, PIB (variación interanual, serie invertida) y Tasa de paro. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

4.3. Estructura de los ejercicios empíricos

El análisis empírico realizado se sustenta en una cartera crediticia ficticia asimilable a la de una entidad financiera dedicada a la banca comercial. La cartera está formada por seis unidades de riesgo, correspondientes con las seis series de HR consideradas: Hipotecas, Empresas, Tarjetas, Consumo, Resto y Lease.

El modelo de pérdida asumido para la cartera es el dado en (2.6), dentro del apartado 2.2. Para centrar el análisis en el riesgo de incumplimiento sistémico, que es el que se recoge en la distribución $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^N)$, se asume que (i) la exposición efectiva total de cada unidad, $E^j = \sum_{i=1}^{M^j} e^i$, es igual a la unidad, $E^j = 1$, $j = 1, \dots, N$, y (ii) se cumplen las condiciones de infinita granularidad expuestas en la Proposición 2.1 del apartado 2.2.

En consecuencia, todas las unidades tienen el mismo peso en la cartera y se cumple que:

$$L^j = \sum_{i=1}^{M^j} \text{Ber}^i(F^j) e^{ij} \equiv F^j \quad (4.1)$$

y

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^N L^j \equiv \tilde{F} = \sum_{j=1}^N F^j \quad (4.2)$$

siendo el soporte de L^j el intervalo (0 1) y el de \tilde{L} el intervalo (0 6).

Esta asunción facilita el análisis de los resultados desde la perspectiva del riesgo sistémico sin restringir el alcance de sus conclusiones, que pueden interpretarse con facilidad en términos de distribuciones de pérdida L^j y \tilde{L} cualesquiera.

El análisis abarca tres ejercicios. Los dos primeros a nivel unidad de riesgo y el tercero para el conjunto de la cartera.

En el primer ejercicio se comparan la distribución de Vasicek, V , con la propuesta, Π . En el segundo se estudia, a través de Π , la influencia de la ventana de cálculo en las métricas de riesgo. Por último, en el tercero se analiza el efecto que tienen el modelo de distribución \mathbf{F} , la ventana de cálculo y la dinámica subyacente en la distribución agregada \tilde{F} y en el grado de dependencia entre las distribuciones F^j , $j = 1, \dots, N$.

En todos los ejercicios se obtienen, con carácter general, las métricas de riesgo presentadas en el apartado 2.2 para las distribuciones de interés⁸.

En el caso de Π , las métricas de riesgo se han estimado, tanto a nivel univariante como multivariante, mediante simulación Monte Carlo. Se ha seguido el algoritmo de simulación general expuesto en el apartado 3.4.3 con 1.000.000 de realizaciones, habiéndose comprobado la estabilidad de los resultados⁹. Para el punto 2 de dicho algoritmo, la simulación de las sendas condicionales $X_{s/t}^j$ que dan lugar a $W_t^j = 1 - \prod_{s=1}^Q \left(1 - N\left(X_{s/t}^j\right)\right)$, se ha empleado la formulación en espacio de los estados. Ello facilita, a través del suavizado del vector de estado, la simulación de valores de W_t para valores iniciales de t .

En lo que respecta a V , las métricas de riesgo univariantes se han obtenido a partir de las propiedades analíticas expuestas en el apartado 2.4.4.2, mientras que para el caso multivariante se ha recurrido a simulación Monte Carlo con 1.000.000 de realizaciones.

Los tres ejercicios empíricos cuentan con una estructura similar: primero se exponen los motivos, objetivos y estructura de la prueba, y después se discuten los resultados obtenidos y las conclusiones de los mismos. Cabe señalar que esta cartera ficticia es la que se emplea en los ejercicios empíricos realizados en los capítulos sucesivos. Ello permite, además de sustentar la discusión en datos reales, profundizar en el conocimiento del riesgo de incumplimiento en una economía tan representativa como la norteamericana.

⁸ μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9, $k_{99,9} = \eta_{99,9} - \mu$. $k_{99,97}$, capital al 99,97, $k_{99,97} = \eta_{99,97} - \mu$. ρ , correlación de activos, $\rho = V\left[N^{-1}(F)\right] / (1 + V\left[N^{-1}(F)\right])$.

⁹ En relación con otros trabajos también es un tamaño de simulación razonable: [98] y [48] emplean el mismo número de simulaciones, mientras que [51] y [30], entre otros, emplean un número inferior.

4.4. Primer ejercicio: Comparación de modelos de distribución de probabilidad de incumplimiento

4.4.1. Descripción

Como se señaló en el apartado 2.4.4.2, el modelo de Vasicek es una de las formulaciones para F más difundida, por lo que resulta de interés efectuar una comparación entre V y Π . [141], [51] y [145], entre otros, realizan ejercicios similares enfrentando otras distribuciones alternativas a la de Vasicek.

En el caso del modelo propuesto existen dos razones adicionales para llevar a cabo la comparación. Por un lado, y dado que V es el principal ejemplo de distribución de corte estático, esta prueba puede entenderse como una comparativa entre enfoques, estático y dinámico, que permite ahondar en las diferencias entre ambos. Por otro lado, al coincidir ambas distribuciones cuando $Q = 1$, la dinámica subyacente es estacionaria, la distribución marginal Normal y la ventana de cálculo suficientemente larga, como se ha probado en los resultados del Capítulo 3, el ejercicio empírico permite observar las consecuencias para las métricas de riesgo de una desviación en estas restricciones.

En este análisis se obtienen las funciones de densidad¹⁰ y las métricas de riesgo de cada unidad según ambos modelos de distribución F . El horizonte de cálculo es trimestral ($Q = 1$) y se ha considerado la ventana de cálculo completa 1991Q1-2010Q4.

4.4.2. Resultados y conclusiones

Los resultados se exponen en la Figura 4.7, Tabla 4.4 y Tabla 4.5. En ellos puede observarse (i) comportamiento bimodal bajo el modelo propuesto, (ii) similitud en la media de ambas distribuciones y discrepancias notables en el resto de métricas, y (iii) mayor sensibilidad del VaR, η , al nivel de cobertura, u , en el modelo de Vasicek¹¹.

¹⁰ En el caso de Π , representada a partir de un suavizado mediante *kernel gaussiano*.

¹¹ Es decir, η varía más al pasar de nivel de cobertura 99,9 a 99,97 bajo V que bajo Π .

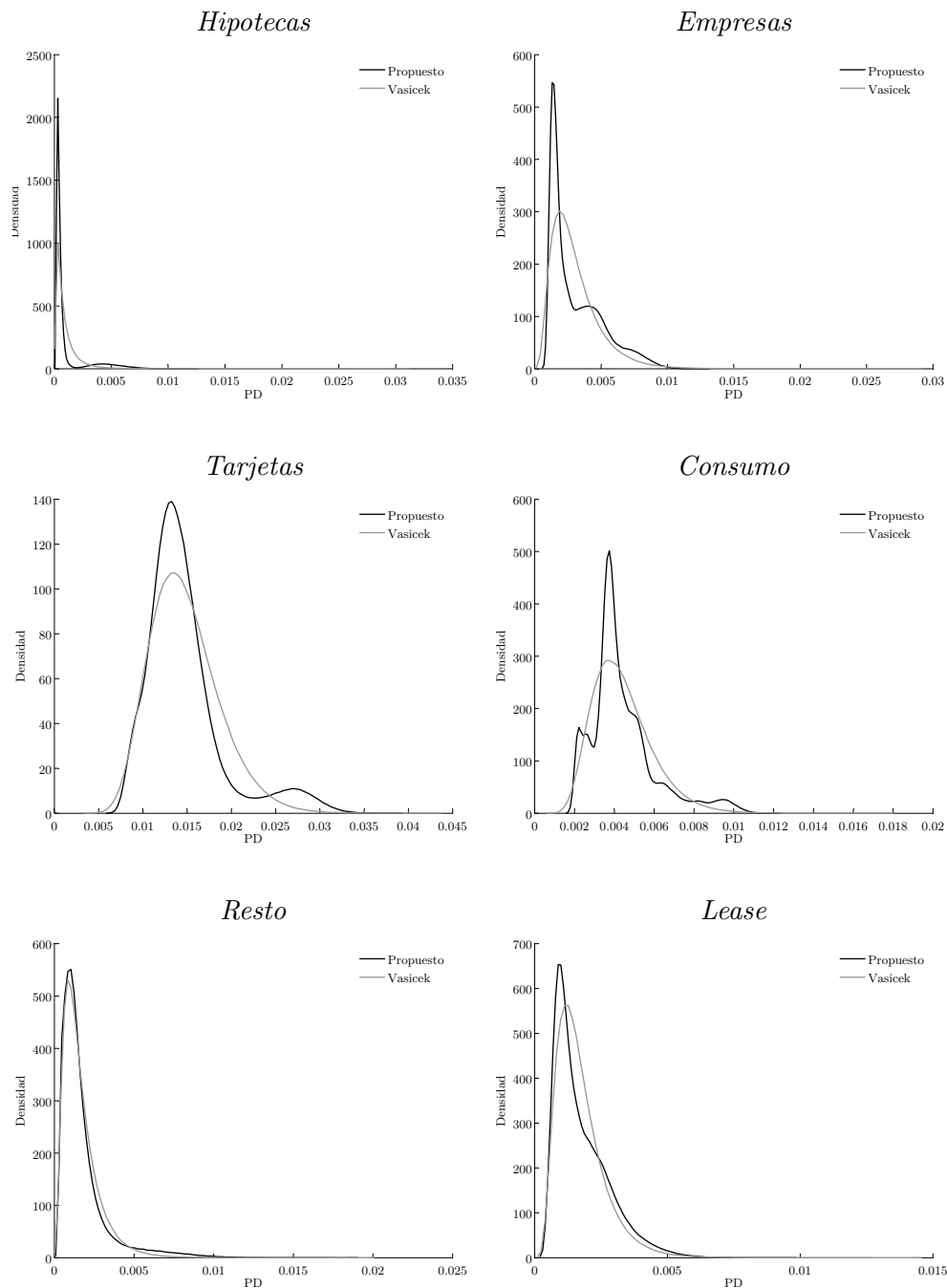


Figura 4.7: Funciones de densidad de las distribuciones de PD a horizonte trimestral bajo el modelo propuesto, Π , y el de Vasicek, V .

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0010	0,0088	0,0095	0,0078	0,0085	0,0781
Empresas	0,0031	0,0103	0,0109	0,0072	0,0078	0,0386
Tarjetas	0,0147	0,0329	0,0342	0,0182	0,0195	0,0117
Consumo	0,0044	0,0107	0,0111	0,0063	0,0067	0,0138
Resto	0,0018	0,0115	0,0129	0,0098	0,0111	0,0468
Lease	0,0018	0,0064	0,0070	0,0046	0,0053	0,0293

Tabla 4.4: Métricas de riesgo a horizonte trimestral para la ventana completa (1991Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, Π . μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0010	0,0104	0,0135	0,0094	0,0125	0,0775
Empresas	0,0030	0,0137	0,0162	0,0107	0,0131	0,0349
Tarjetas	0,0148	0,0312	0,0338	0,0164	0,0190	0,0109
Consumo	0,0044	0,0113	0,0125	0,0069	0,0081	0,0131
Resto	0,0017	0,0091	0,0110	0,0074	0,0093	0,0401
Lease	0,0017	0,0067	0,0078	0,0050	0,0061	0,0247

Tabla 4.5: Métricas de riesgo a horizonte trimestral para la ventana completa (1991Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD de Vasicek, V . μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

En lo que respecta a la bimodalidad, ésta resulta evidente en Empresas y Consumo, y en menor medida en Hipotecas y en Lease. Este resultado es consistente con los histogramas de la Figura 4.2, está en línea con los resultados obtenidos en otros estudios, como, por ejemplo, [26], [66] y [131], y pone de manifiesto dos puntos. Por un lado, que el enfoque estático, generalmente sustentado en una distribución paramétrica unimodal, puede resultar fuertemente inadecuado incluso desde una mera perspectiva de ajuste a los datos. Por otro, que Π puede recoger este comportamiento sin necesidad de especificar para x_t un modelo de cambio de régimen, como así sucede en otras aproximaciones¹². Es decir, la estructura de mixtura de distribuciones condicionales permite capturar de forma parsimoniosa morfologías irregulares cuando éstas estén presentes en los datos.

En lo que respecta a las métricas de riesgo, se observa (i) similitud en el valor medio, lo que resulta consistente con el carácter lineal e integrado de las dinámicas, así como con el horizonte de cálculo¹³ $Q = 1$, (ii) discrepancia en las cifras de VaR, debido al distinto tratamiento de la multimodalidad, (iii) discrepancia en las cifras de capital, de forma llamativa en Empresas y Tarjetas, consecuencia de las discrepancias

¹² Los modelos de cambio de régimen comentados en el apartado 3.4.1 suponen, de hecho, un instrumento con el que recoger el comportamiento multimodal presente en los datos.

¹³ Puesto que en tal caso $W_t = N(X_{1/t})$ y en consecuencia $E[W_t] = E[N(X_{s/t})] \approx N(E[X_{1/t}]) \approx N(x_t) = h_t$.

en la cifra de VaR, y (iv) discrepancia en las cifras de correlación de activos, lo que evidencia que las distribuciones tienen, de hecho, varianzas distintas.

Estos puntos evidencian que la incapacidad del modelo de Vasicek para recoger comportamientos multimodales puede conducir a una medición incorrecta del riesgo de incumplimiento. Además, puesto que el modelo de Vasicek es el de Basilea, las discrepancias observadas aportan evidencia empírica a un punto ya señalado por [93]: dos entidades con requerimientos de capital regulatorio similares pueden obtener cifras de capital económico distintas, y, a su vez, dos entidades con requerimientos de capital económico similares pueden presentar cifras regulatorias dispares, lo que puede generar distorsiones y ventajas competitivas.

Por último, la mayor sensibilidad de η a u bajo V que bajo Π resulta consistente con la imposibilidad de la primera para recoger comportamientos multimodales como los observados en los datos. En este caso, la unimodalidad de V y la irregularidad de las series conducen a una mayor curtosis bajo el modelo de Vasicek que bajo el propuesto, como muestra el hecho de que en algunas unidades la correlación de activos es menor y el capital mayor bajo el modelo de Vasicek que bajo el propuesto. La mayor curtosis incrementa el peso de la cola y una cola más pesada implica un VaR más sensible al percentil de cálculo. Cabe señalar que este efecto no siempre es conservador, puesto que para algunas unidades el capital es mayor por Π que por V , pero sí puede traducirse en falta de robustez de la cifra de capital estimada y, en último término, en riesgo de modelo.

La conclusión general del ejercicio es que el incumplimiento de las hipótesis que soportan V puede conducir a estimaciones de las métricas de riesgo dispares con las obtenidas bajo el modelo propuesto. La relevancia de las carencias observadas y el hecho de que, debido a la influencia del ciclo económico, la no estacionariedad y la irregularidad se darán en la mayoría de los casos, sugieren que el principal, y quizás único, punto a favor de este modelo, y en general del enfoque estático, es su flexibilidad analítica y la sencillez de su estimación y simulación.

4.5. Segundo ejercicio: Influencia de la ventana de cálculo

4.5.1. Descripción

Según se discutió en el apartado 3.2, la ventana de cálculo influye significativamente en las métricas de riesgo, en especial en el caso de no estacionariedad de las series de HR, donde los límites inferior y superior de la ventana de cálculo condicionan fuertemente la clase de entorno económico que se recoge en la distribución F .

Cabe preguntarse entonces por la magnitud de esta influencia en términos empíricos. A pesar de su relevancia, esta cuestión no ha recibido especial atención en el estudio del riesgo de incumplimiento salvo en algunos trabajos, como [30], [11] y [117]. No obstante, dichos trabajos estudian el comportamiento de las distribuciones de pérdidas asociadas a cada uno de los estados de un modelo de cambio de régimen, estados que se corresponden con distintas subventanas, pero no inciden en cómo la ventana de cálculo determina el escenario económico de referencia, ni cómo el escenario económico de referencia determina las métricas de riesgo.

El ejercicio se compone de dos análisis. En ambos se obtienen las métricas de riesgo y las densidades de las distribuciones para Π a horizonte anual bajo dinámica subyacente SUTSE. La diferencia radica en la ventana de cálculo. En el primero se comparan la ventana completa 1991Q1-2010Q4, ventana de “ciclo completo”, y la ventana reducida 2008Q1-2010Q4, ventana de “recesión”, lo que permite estudiar el efecto del entorno económico. En el segundo también se consideran dos ventanas distintas, pero en este caso disjuntas, de la misma longitud y sin la identificación con una clase especial de escenario económico: ventana “inicial” 1991Q1-2000Q4 y ventana “final” 2001Q1-2010Q4, lo que permite estudiar el efecto de los límites tl y tu , manteniendo fijo T .

4.5.2. Resultados y conclusiones

Los resultados del primer ejercicio se presentan en la Figura 4.8, Tabla 4.6 y Tabla 4.7 y evidencian (i) disparidad en la morfología de las distribuciones entre ventanas, con un comportamiento más irregular en la de recesión, (ii) valores de pérdida esperada y VaR más elevados en la ventana de recesión, y (iii) cifras de capital discordantes, siendo en algunas unidades mayor la que se obtiene en la ventana completa que en la ventana reducida, y viceversa.

El primer punto resulta consistente con el comportamiento más irregular de las series de HR en el entorno recesivo, con un fuerte crecimiento y la existencia de pronunciados picos, lo que se traduce en una mayor dispersión de las distribuciones W_t y en consecuencia en un comportamiento más irregular de Π , incluyendo una mayor tendencia a la multimodalidad. El número mucho mayor de periodos con los que cuenta la ventana completa, que incluye de hecho a la reducida, atenúa este efecto.

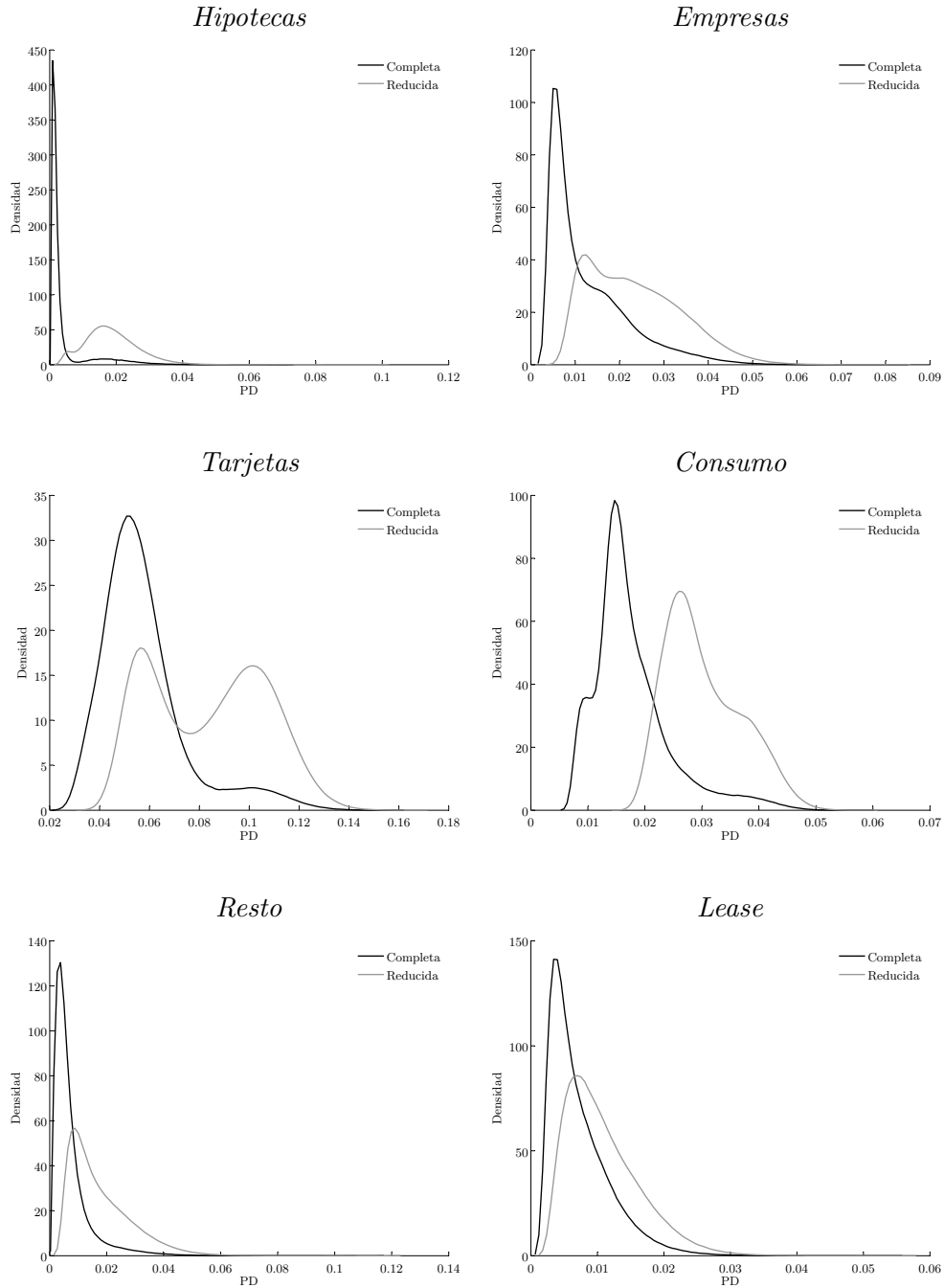


Figura 4.8: Funciones de densidad de las distribuciones de PD a horizonte anual bajo el modelo propuesto, Π , para las ventanas completa (1991Q1-2010Q4) y reducida (2008Q1-2010Q4).

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0043	0,0429	0,0483	0,0386	0,0440	0,1066
Empresas	0,0128	0,0536	0,0585	0,0407	0,0457	0,0602
Tarjetas	0,0576	0,1331	0,1396	0,0755	0,0820	0,0195
Consumo	0,0177	0,0475	0,0499	0,0298	0,0323	0,0211
Resto	0,0073	0,0541	0,0629	0,0467	0,0556	0,0681
Lease	0,0073	0,0305	0,0344	0,0232	0,0272	0,0435

Tabla 4.6: Métricas de riesgo a horizonte anual para la ventana completa (1991Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, Π . μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0186	0,0516	0,0568	0,0330	0,0382	0,0352
Empresas	0,0233	0,0609	0,0657	0,0376	0,0424	0,0367
Tarjetas	0,0837	0,1431	0,1489	0,0594	0,0651	0,0246
Consumo	0,0303	0,0510	0,0529	0,0207	0,0226	0,0091
Resto	0,0176	0,0678	0,0762	0,0502	0,0586	0,0554
Lease	0,0109	0,0352	0,0394	0,0243	0,0285	0,0359

Tabla 4.7: Métricas de riesgo a horizonte anual para la ventana reducida (2008Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, Π . μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

En lo que respecta al segundo y tercer punto, que media y percentil de las distribuciones crezcan al restringir la ventana de cálculo a los peores periodos resulta esperable, puesto que la mixtura se forma en ese caso exclusivamente con distribuciones condicionales W_t vinculadas a una época recesiva. El efecto apreciado sobre la cifra de capital, sin embargo, señala un comportamiento relevante: como consecuencia de restringir la ventana a una época de recesión, la máxima pérdida potencial (el VaR) aumenta, pero lo hace a costa de un mayor incremento del deterioro previsible del activo (la pérdida esperada), disminuyendo por tanto la incertidumbre asociada a las pérdidas inesperadas, es decir, disminuyendo el capital. Puesto que la correlación de activos cae en todas las unidades en la ventana reducida, lo anterior evidencia también un incremento de la curtosis en algunas unidades con la restricción del escenario económico a uno de marcada recesión¹⁴.

Este efecto evidencia el comportamiento distinto de la distribución F en función del escenario económico predominante y subraya la utilidad del estudio de métricas de riesgo de carácter “incondicional” sobre ventanas distintas a las de “ciclo completo”, en especial las vinculadas a un entorno recesivo, ya que pueden mostrar un comportamiento diferencial y ofrecen información adicional de interés para la medición del riesgo de incumplimiento o en otras aplicaciones, como el análisis de escenarios. Cuestiones como qué requerimientos de capital, pérdida esperada o correlación cabe esperar en un

¹⁴ Ya que la varianza es menor y el capital mayor para dichas unidades en la ventana 2008Q1-2010Q4 que en la ventana 1991Q1-2010Q4.

entorno de recesión pueden abordarse entonces a través de Π , si bien no como mixtura de todas las distribuciones W_t asociadas a la ventana “de ciclo completo”, sino sólo de aquellas correspondientes a una época de desempeño económico desfavorable.

En lo relativo al segundo ejercicio, los resultados de la Figura 4.9, donde se comparan las dos series de HR, Figura 4.10, Tabla 4.8 y Tabla 4.9 muestran dos hechos: (i) un comportamiento en las series de HR muy diferente entre ventanas para una misma unidad de riesgo, y (ii) una fuerte disparidad en todas las métricas de riesgo.

Dichos puntos evidencian una causa y una consecuencia. La causa es la no estacionariedad de las series, que deriva en la no existencia de una distribución de largo plazo y, por tanto, en que ventanas distintas pueden ofrecer representaciones de la serie muy diferentes. La consecuencia se materializa en la fuerte discrepancia entre las métricas de riesgo de una misma unidad de riesgo en las dos ventanas consideradas. Así, la segunda ventana genera métricas de riesgo, tanto media, como capital y correlación más elevadas, en especial en el caso de la unidad de Hipotecas. Ello es consistente con el hecho de que la Gran Recesión, mucho más severa que las crisis precedentes, se enmarca en la segunda ventana. La unidad de Hipotecas es, de hecho, una prueba evidente del impacto desigual de estas crisis y por ello de la influencia de la venta de cálculo.

La conclusión general del ejercicio es que la ventana de cálculo influye de forma determinante en las métricas de riesgo en el caso de no estacionariedad. Puede afirmarse que a mayor proporción de periodos desfavorables, mayores valores de pérdida esperada y VaR, mientras que la cifra de capital, diferencia entre ambos, depende de aspectos más sutiles como la homogeneidad del entorno económico que rige en la ventana y la regularidad que presentan las series de HR durante la misma. El análisis efectuado el Capítulo 5 profundiza en las razones de este comportamiento.

Por último, cabe señalar dos puntos en relación con la ventana de cálculo que se derivan de los resultados precedentes.

Primero, el hecho de que, además de la dificultad que supone la definición del intervalo temporal de “ciclo completo”, la no estacionariedad provoca problemas adicionales en el mantenimiento de la ventana de cálculo. Así, por ejemplo, si se opta por una ventana fija, que no cambie con el tiempo, ésta puede quedar obsoleta y responder a una realidad económica distinta de la actual. Por el contrario, una ventana móvil de longitud fija puede provocar inestabilidad en las cifras de capital por el impacto que puede tener sobre F la sustitución de un periodo por otro. En general, los resultados obtenidos muestran la necesidad de criterio subjetivo, no arbitrario, en su elección, así como una revisión y actualización continua.

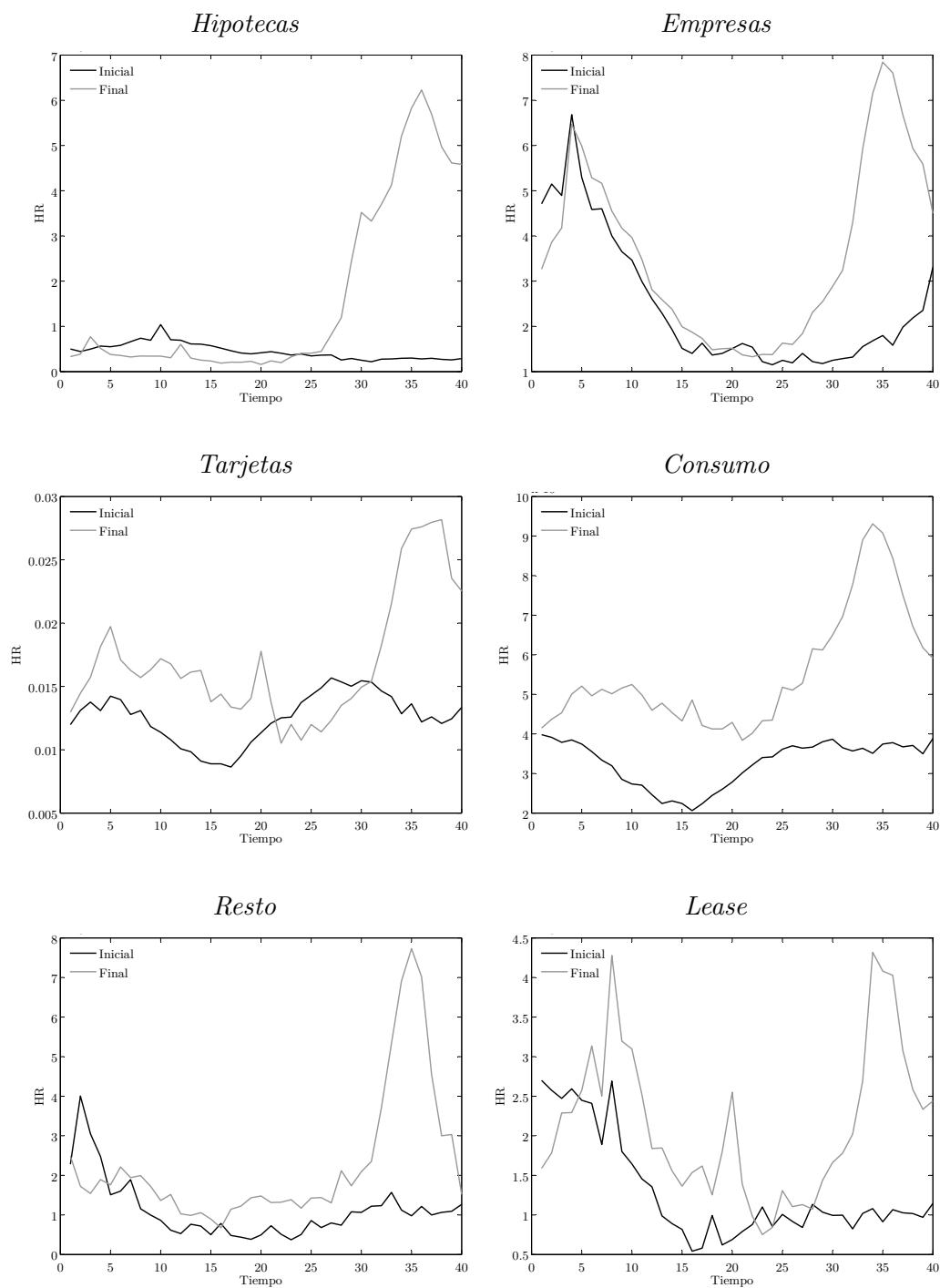


Figura 4.9: Series de HR durante los 40 periodos de las ventanas inicial (1991Q1-2000Q4) y final (2001Q1-2010Q4).

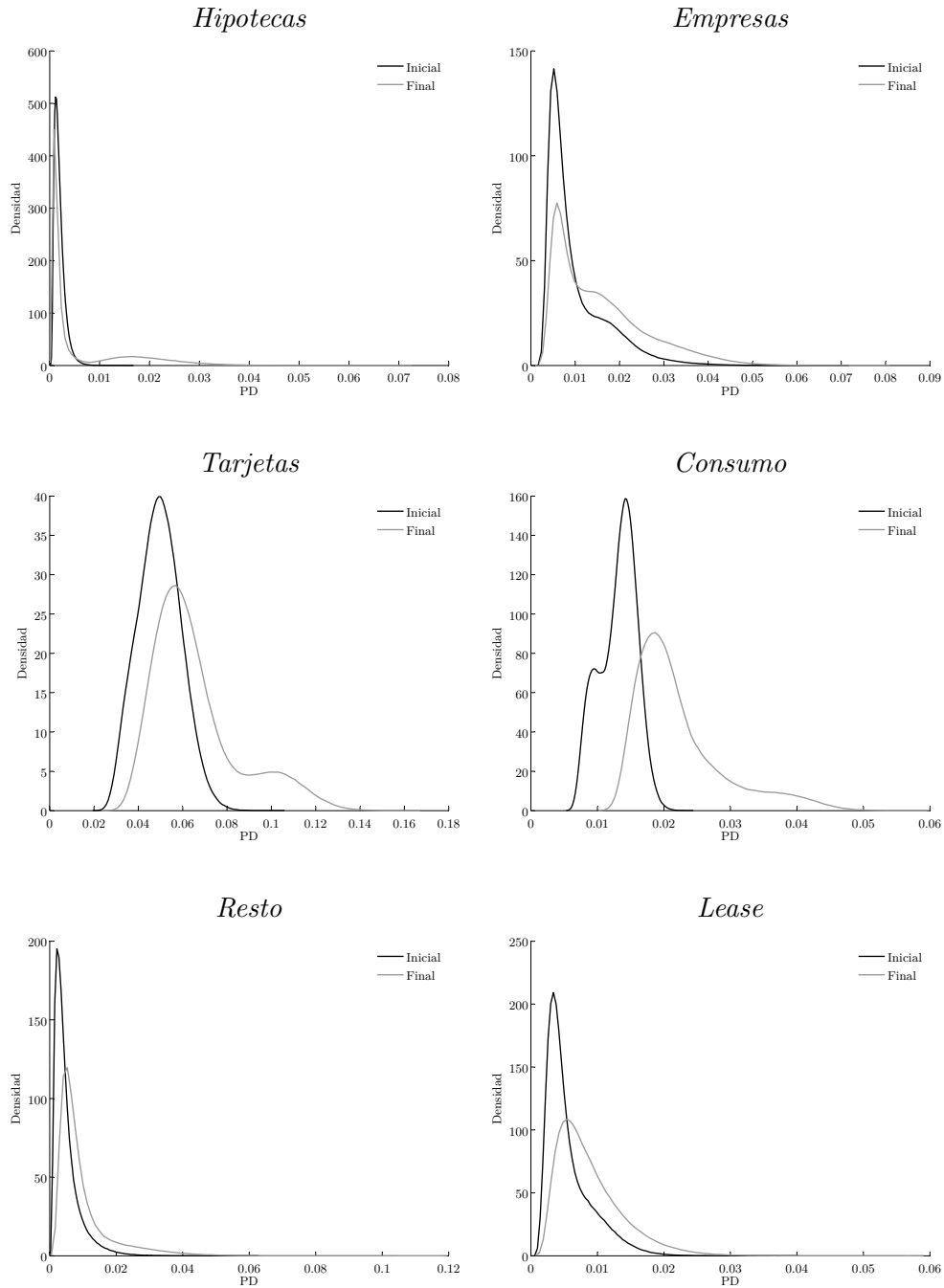


Figura 4.10: Funciones de densidad de las distribuciones de PD a horizonte anual bajo el modelo propuesto, Π , para las ventanas inicial (1991Q1-2000Q4) y final (2001Q1-2010Q4).

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0019	0,0082	0,0096	0,0062	0,0076	0,0253
Empresas	0,0101	0,0451	0,0504	0,0351	0,0403	0,0473
Tarjetas	0,0495	0,0814	0,0851	0,0319	0,0356	0,0095
Consumo	0,0131	0,0205	0,0212	0,0074	0,0081	0,0077
Resto	0,0050	0,0307	0,0358	0,0257	0,0308	0,0527
Lease	0,0056	0,0224	0,0250	0,0168	0,0194	0,0368

Tabla 4.8: Métricas de riesgo a horizonte anual para la ventana inicial (1991Q1-2000Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, II. μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

<i>Unidad</i>	μ	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$	$k_{99,9}$	$k_{99,97}$	ρ
Hipotecas	0,0067	0,0460	0,0517	0,0394	0,0450	0,1630
Empresas	0,0156	0,0564	0,0613	0,0409	0,0458	0,0616
Tarjetas	0,0656	0,1369	0,1426	0,0713	0,0769	0,0210
Consumo	0,0222	0,0488	0,0509	0,0266	0,0286	0,0137
Resto	0,0097	0,0594	0,0683	0,0497	0,0586	0,0601
Lease	0,0089	0,0325	0,0365	0,0236	0,0276	0,0375

Tabla 4.9: Métricas de riesgo a horizonte anual para la ventana final (2001Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, II. μ , pérdida esperada. $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9. $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97. $k_{99,9}$, capital al 99,9. $k_{99,97}$, capital al 99,97. ρ , correlación de activos.

Segundo, el hecho de que la influencia que la ventana de cálculo tiene en las métricas de riesgo puede convertir ésta en una palanca para arbitrar en la cifra de capital. Bajo determinadas condiciones, las entidades pueden verse incentivadas a escoger, de entre las alternativas razonablemente admisibles, aquélla que suponga un menor recargo de capital¹⁵, aprovechando que el criterio para la elección de la ventana es, cuanto menos, difuso. Ello subraya la importancia de evaluar la ventana de cálculo escogida por la entidad en el proceso de validación de cualquier modelo de pérdida, en especial en el caso de no estacionariedad.

4.6. Tercer ejercicio: Análisis de la distribución agregada

4.6.1. Descripción

La distribución agregada de la cartera recoge el comportamiento de todas las unidades que la forman, por lo que sus métricas de riesgo se ven influenciadas por (i) las

¹⁵ Implícitamente, ello supone que, dado un nivel de cobertura, existen distintas cifras de capital de “ciclo económico completo”, dependientes de la ventana de cálculo escogida, aún cuando dichas ventanas sean suficientemente largas. La no estacionariedad genera, en definitiva, problemas de consistencia.

distribuciones individuales, y (ii) la estructura de dependencia entre ellas. Por ello, su análisis resulta especialmente atractivo. En este ejercicio se efectúa uno en términos de las métricas de riesgo agregadas desde dos perspectivas complementarias.

Por un lado, en términos del modelo de distribución \mathbf{F} escogido. A diferencia de otros trabajos, como [108] y [39], en los que el interés radica en la bondad del ajuste estadístico a nivel multivariante, el objetivo del análisis efectuado es comparar el planteamiento estático frente al dinámico. Para ello se obtienen, bajo dinámica subyacente SUTSE y a horizonte trimestral, las métricas de riesgo habituales, salvo la correlación de activos, para $\tilde{V} = \sum_{j=1}^N V^j$ y $\tilde{\Pi} = \sum_{j=1}^N \Pi^j$. Además, se incluyen los ratios de diversificación agregados para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97, $\tilde{\lambda}_{99,9}$ y $\tilde{\lambda}_{99,97}$, definidos en el apartado 2.3.5.

Por otro, y dado el modelo de distribución propuesto, en términos de la dinámica multivariante subyacente y de la ventana de cálculo. Este enfoque permite profundizar en la línea seguida en otros estudios similares, como [98], [141], [143], [132] y [128], entre otros, en los que también se obtienen métricas de riesgo para un conjunto de unidades, pero en los que, o bien no se contempla al mismo tiempo la distribución agregada y el grado de dependencia, medido por el ratio de diversificación agregado¹⁶, o bien no se controla simultáneamente por dinámica subyacente y ventana de cálculo. Ello permite, en particular, estudiar el efecto sobre las métricas de riesgo de la consideración o no de una estructura de raíz unitaria para las series de HR.

Para este fin se obtienen las métricas de riesgo habituales a horizonte anual, salvo la correlación de activos, de $\tilde{\Pi} = \sum_{j=1}^N \Pi^j$ para el producto de dos opciones dicotómicas: (i) dinámica subyacente, factorial frente a SUTSE, y (ii) ventana de cálculo, inicial (1991Q1-2000Q4) frente a final (2001Q1-2010Q4) y completa (1991Q1-2010Q4) frente a reducida (2008Q1-2010Q4). Se incluyen también los ratios de diversificación agregados para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97, $\tilde{\lambda}_{99,9}$ y $\tilde{\lambda}_{99,97}$.

4.6.2. Resultados y conclusiones

En lo que respecta a la comparación entre el modelo de Vasicek y el propuesto, los resultados se muestran en la Tabla 4.10 y revelan tres hechos.

<i>Modelo</i>	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\eta}_{99,9}$	$\tilde{\eta}_{99,97}$	$\tilde{k}_{99,9}$	$\tilde{k}_{99,97}$	$\tilde{\lambda}_{99,9}$	$\tilde{\lambda}_{99,97}$
$\tilde{\Pi}$	0,0267	0,0716	0,0743	0,0449	0,0475	0,1677	0,1936
\tilde{V}	0,0265	0,0701	0,0787	0,0436	0,0522	0,2189	0,2336

Tabla 4.10: Métricas de riesgo agregadas a horizonte trimestral para la ventana completa (1991Q1-2010Q4) bajo el modelo de distribución de PD propuesto, $\tilde{\Pi}$, y el de Vasicek, \tilde{V} . $\tilde{\mu}$, pérdida esperada. $\tilde{\eta}_{99,9}$, VaR al 99,9. $\tilde{\eta}_{99,97}$, VaR al 99,97. $\tilde{k}_{99,9}$, capital al 99,9. $\tilde{k}_{99,97}$, capital al 99,97. $\tilde{\lambda}_{99,9}$, diversificación agregada al 99,9. $\tilde{\lambda}_{99,97}$, diversificación agregada al 99,97.

¹⁶ Puesto que a mayor dependencia entre unidades, menor diversificación agregada.

Primero, una discrepancia apreciable en las cifras de VaR, y en consecuencia en las de capital, entre modelos de distribución, si bien en menor medida que en el caso univariante, lo que sugiere un efecto cancelación entre unidades.

Segundo, un menor peso de la cola de la distribución agregada en el caso del modelo propuesto, $\tilde{\Pi}$, que en el de Vasicek, \tilde{V} , como se observa en las cifras de VaR, que crecen significativamente más bajo el segundo que bajo el primero al incrementar el nivel de cobertura. Este efecto es consistente con los resultados obtenidos a nivel univariante, de forma que el mayor peso en la cola de las distribuciones V^j respecto de Π^j se propaga ahora a las distribución agregadas \tilde{V} y $\tilde{\Pi}$.

Tercero, una diversificación agregada ligeramente menor bajo Π que bajo V , lo que resulta consistente con la rigidez de la primera ante la marcada irregularidad de las distribuciones marginales y el comportamiento parcialmente heterogéneo de las series de HR a lo largo de la ventana, y con ello de la dependencia entre unidades. Cabe señalar que a diferencia del modelo de Vasicek, en el propuesto la dependencia entre las distribuciones marginales Π^j se establece a través de las distribuciones condicionales W_t^j , $t = 1, \dots, T$, lo que permite una medición de la misma más precisa si existe comportamiento multimodal, en especial la dependencia en la cola de las distribuciones¹⁷. Puesto que la dependencia en la cola es precisamente la que determina la diversificación agregada, los resultados obtenidos sugieren una infraestimación de la dependencia por parte del modelo de Vasicek y en consecuencia una diversificación excesiva.

En lo que respecta a la comparativa en términos de la dinámica subyacente y la ventana de cálculo, los resultados se presentan en la Tabla 4.11 para el caso de las ventanas inicial/final y en la Tabla 4.12 para las ventanas completa/reducida. Resultan relevantes dos aspectos.

<i>Dinámica</i>	<i>Ventana</i>	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\eta}_{99,9}$	$\tilde{\eta}_{99,97}$	$\tilde{k}_{99,9}$	$\tilde{k}_{99,97}$	$\tilde{\lambda}_{99,9}$	$\tilde{\lambda}_{99,97}$
SUTSE	Completa	0,1070	0,3035	0,3209	0,1965	0,2139	0,2280	0,2540
	Reducida	0,1844	0,3284	0,3422	0,1440	0,1578	0,3604	0,3823
Factorial	Completa	0,1061	0,3133	0,3328	0,2071	0,2267	0,1106	0,1267
	Reducida	0,1830	0,3458	0,3642	0,1628	0,1812	0,1933	0,2043

Tabla 4.11: Métricas de riesgo agregadas a horizonte anual bajo el modelo de distribución de PD propuesto, $\tilde{\Pi}$, para las ventanas completa (1991Q1-2010Q4) y reducida (2008Q1-2010Q4) y para los modelos multivariantes SUTSE y factorial. $\tilde{\mu}$, pérdida esperada. $\tilde{\eta}_{99,9}$, VaR al 99,9. $\tilde{\eta}_{99,97}$, VaR al 99,97. $\tilde{k}_{99,9}$, capital al 99,9. $\tilde{k}_{99,97}$, capital al 99,97. $\tilde{\lambda}_{99,9}$, diversificación agregada al 99,9. $\tilde{\lambda}_{99,97}$, diversificación agregada al 99,97.

Por un lado, dada una dinámica subyacente, se reproduce el efecto observado a nivel univariante: (i) media y VaR son mayores bajo las ventanas final/reducida, en las que la proporción de periodos desfavorables es más elevada, y (ii) el capital presenta un comportamiento distinto en cada caso: aumenta en la ventana final respecto de la inicial, pero disminuye en la reducida frente a la completa.

¹⁷ Véase [60] para una introducción al concepto de *dependencia en la cola* y su relevancia en la medición del riesgo.

En lo que respecta al ratio de diversificación agregado, se observa que éste aumenta (i) al considerar una ventana homogénea y de pocos periodos (ventana reducida) respecto a una ventana que recoge un “ciclo económico completo” (ventana completa), y (ii) al considerar una ventana heterogénea que contiene recesiones suaves (ventana inicial) respecto a una ventana también heterogénea pero que incluye la Gran Recesión (ventana final).

Estos resultados evidencian empíricamente que una mayor proporción de periodos recesivos en una ventana de cálculo conlleva, frente a una ventana con menor número de ellos, una media y VaR agregados más altos. Sin embargo, y como también sucede a nivel univariante, la cifra de capital y la diversificación no responden a un patrón claro y pueden aumentar o disminuir en función de (i) la longitud de ambas ventanas, (ii) el grado de homogeneidad de los periodos que la forman, y (iii) el hecho de que sean disjuntas o, como sucede con las ventanas completa y reducida, una de ellas esté contenida en la otra.

<i>Dinámica</i>	<i>Ventana</i>	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\eta}_{99,9}$	$\tilde{\eta}_{99,97}$	$\tilde{k}_{99,9}$	$\tilde{k}_{99,97}$	$\tilde{\lambda}_{99,9}$	$\tilde{\lambda}_{99,97}$
SUTSE	Inicial	0,0853	0,1568	0,1652	0,0715	0,0799	0,4183	0,4370
	Final	0,1288	0,3134	0,3279	0,1846	0,1991	0,2655	0,2953
Factorial	Inicial	0,0843	0,1656	0,1760	0,0813	0,0917	0,2259	0,2384
	Final	0,1278	0,3259	0,3463	0,1981	0,2185	0,1333	0,1492

Tabla 4.12: Métricas de riesgo agregadas a horizonte anual bajo el modelo de distribución de PD propuesto, $\tilde{\Pi}$, para las ventanas inicial (1991Q1-2000Q4) y final (2001Q1-2010Q4) y para los modelos multivariantes SUTSE y factorial. $\tilde{\mu}$, pérdida esperada. $\tilde{\eta}_{99,9}$, VaR al 99,9. $\tilde{\eta}_{99,97}$, VaR al 99,97. $\tilde{k}_{99,9}$, capital al 99,9. $\tilde{k}_{99,97}$, capital al 99,97. $\tilde{\lambda}_{99,9}$, diversificación agregada al 99,9. $\tilde{\lambda}_{99,97}$, diversificación agregada al 99,97.

Por otro lado, dada una ventana de cálculo, las cifras de capital que se obtienen bajo la formulación unifactorial son ligeramente superiores a las que genera la aproximación SUTSE, mientras que el ratio de diversificación es notablemente inferior. Este resultado pone de manifiesto que la fuerte restricción que impone la estructura unifactorial entre las series de HR aumenta la dependencia entre las distribuciones Π^j y conduce a métricas de riesgo agregadas más elevadas a pesar de la ineficiencia de la dinámica SUTSE, que conlleva mayor varianza en las distribuciones condicionales $X_{s/t}$ y en consecuencia mayores cifras de capital individual, como se comprueba en la Figura 4.11.

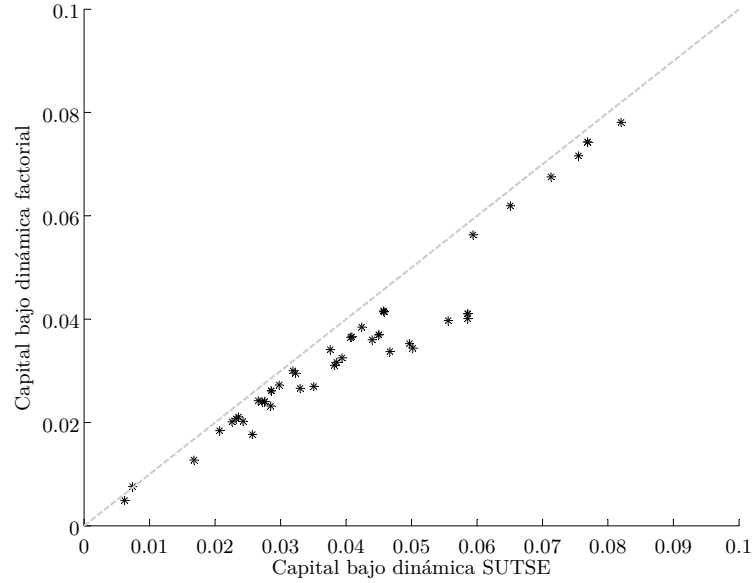


Figura 4.11: Cifras de capital individual bajo las dinámicas SUTSE y factorial para cada combinación de unidad de riesgo, nivel de cobertura (99,9 y 99,97) y ventana de cálculo, inicial (1991Q1-2000Q4), final (2001Q1-2010Q4), completa (1991Q1-2010Q4) y reducida (2008Q1-2010Q4).

La conclusión general de la prueba es que la distribución agregada también se ve influenciada por el modelo de distribución, la ventana de cálculo y la dinámica subyacente, pero lo hace de una forma más compleja que a nivel univariante: el efecto sobre las distribuciones marginales puede potenciarse o cancelarse, y la dependencia entre unidades puede revertir un comportamiento apreciado individualmente sobre algunas de las unidades de riesgo que formen la cartera.

En todo caso, es claro que el modelo de Vasicek resulta una opción inadecuada en presencia de no estacionariedad, que el comportamiento de la cifra capital y la diversificación agregada dependen fuertemente de la composición de la ventana y que la dinámica SUTSE puede ofrecer, respecto a una dinámica que recoja explícitamente las interacciones entre series, en particular bajo una estructura de raíz unitaria, cifras de capital ligeramente superiores a nivel univariante e inferiores a nivel agregado.

Capítulo 5

Análisis condicional del riesgo de incumplimiento

5.1. Introducción

Las distribuciones condicionales son relevantes para el análisis y medición del riesgo de incumplimiento puesto que (i) existen siempre y están bien definidas, y (ii) al estar vinculadas a cada periodo t , recogen la evolución del riesgo a lo largo del eje temporal, lo que resulta útil tanto para comprender la influencia del ciclo económico como para estudiar metodologías alternativas al empleo de la distribución “incondicional” en la medición de “ciclo económico completo”.

El objetivo de este capítulo es abordar dicho análisis a nivel unidad de riesgo, análisis que se sustenta en las componentes W_t , sus métricas de riesgo, que son condicionales, y el comportamiento de éstas a lo largo de la ventana de cálculo. Ello significa un análisis del riesgo de incumplimiento en la *dimensión temporal*, lo que supone también un enfoque complementario al seguido en los dos capítulos precedentes, donde el interés se ha centrado en la distribución “incondicional” II.

La estructura del capítulo es la siguiente: en el segundo apartado se formula una aproximación analítica a las distribuciones de PD condicional que permite deducir distintas propiedades, incluido su comportamiento a lo largo del tiempo y la relación de éste con el ciclo económico. Dicha evolución se estudia empíricamente en el tercer apartado, mientras que en el cuarto se aborda el problema de la determinación del nivel de cobertura “incondicional” a través de las distribuciones condicionales.

5.2. Marco analítico

5.2.1. Introducción

Las distribuciones y métricas de riesgo condicionales, bien para la PD o para la pérdida, han dado lugar a un número creciente de trabajos, sobre todo en el ámbito de los modelos de stress test. No obstante, cabe señalar dos aportaciones del enfoque seguido en este capítulo.

Primero, son motivo de estudio todas las métricas de riesgo en todos los periodos de la ventana, por contraposición a la consideración exclusiva de la pérdida esperada, o bien la restricción a periodos puntuales, como sucede en [141], [139], [36], [54], [140] y [161], entre otros. El objetivo es, por tanto, caracterizar ampliamente el riesgo de incumplimiento asociado a las distribuciones condicionales.

Segundo, el interés no radica en la sensibilidad de las métricas de riesgo a la dinámica subyacente, bien ante cambios en la especificación de ésta, como, por ejemplo, en [143], [10] y [132], bien ante distintas perturbaciones sobre las proyecciones de las variables exógenas, como en [98], [149] y [55], entre otros. Por el contrario, se estudian las propias distribuciones W_t : sus métricas de riesgo, la evolución de éstas a lo largo del eje temporal y su relación con la serie de HR.

Para el marco analítico se ha optado por una aproximación sencilla que permite un análisis general y ofrece una interpretación inmediata en términos de las métricas de riesgo. En todo caso, tiene un fundamento analítico sólido y se asemeja al análisis efectuado en otros trabajos, como [165], [118] y [78], con los matices comentados en los dos puntos anteriores.

5.2.2. Aproximación empleada

El análisis de las distribuciones W_t parte de la función $\tilde{\mathcal{F}}$,

$$\tilde{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_Q) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(x_s)) \quad (5.1)$$

que relaciona W_t con las distribuciones condicionales de x_t , $X_{s/t}$:

$$W_t = \tilde{\mathcal{F}}(X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) \quad (5.2)$$

Estudiar las métricas de riesgo condicionales a través de $\tilde{\mathcal{F}}$ entraña algunas dificultades: por un lado, su forma funcional es no lineal, involucrando un producto y la función de distribución de la Normal estándar. Ésta última carece, además, de representación analítica. Por otro, supone hacer depender el análisis de las distribuciones condicionales

$X_{s/t}$, que dependen a su vez de la dinámica subyacente elegida, lo que reduce el carácter general del análisis.

Por ello, resulta preferible emplear una aproximación lineal de la función $\tilde{\mathcal{F}}$. Se escoge para ello el polinomio de Taylor de primer orden en el entorno del punto del hiperplano identidad¹, $\hat{\mathbf{a}} = (a, \dots, a) \in \mathbb{R}^Q$, de forma que:

$$\tilde{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_Q) \approx \tilde{\mathcal{F}}(a, \dots, a) + \sum_{s=1}^Q (x_s - a) \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial x_s}(a) \quad (5.3)$$

lo que conduce a:

$$\tilde{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_Q) \approx 1 - (1 - N(a))^Q + n(a)(1 - N(a))^{Q-1} \sum_{s=1}^Q (x_s - a) \quad (5.4)$$

donde $n(\cdot)$ es la función de densidad de la distribución $N(0, 1)$.

Esta expresión sustenta toda la discusión posterior. Para mejorar su utilidad, resulta conveniente acotar la familia de dinámicas para x_t a la siguiente especificación:

1. x_t cuenta con fuerte persistencia, de forma que $E[X_{s/t}] \approx x_t$ para $s = 1, \dots, Q$.
2. x_t es homocedástico, es decir, $V[X_{s/t}] = \nu$ para todo t y s .

En lo relativo a la primera restricción, la taxonomía es la siguiente: si el proceso es al menos $I(1)$, la condición $E[X_{s/t}] \approx x_t$ se cumple siempre que la estructura adicional a la raíz unitaria sea débil. En particular, si la dinámica es un paseo aleatorio, la aproximación es, de hecho, una igualdad. Si la serie es estacionaria pero tiene una raíz cercana a la unidad, la hipótesis sigue siendo aceptable en las condiciones anteriores. Si la dinámica es estacionaria y cuenta con un rápido retorno al estado estacionario, x^* , entonces la aproximación puede ser imprecisa. Pero es en este caso donde el estudio de la evolución a lo largo del tiempo de W_t carece de interés: al ser la serie estacionaria, las distribuciones condicionales $X_{s/t}$ pueden aproximarse adecuadamente en el punto x^* . Dado que este punto es constante para todos los periodos, W_t presentará características similares para todo t , sin una evolución reseñable a lo largo de la ventana.

Por ello, puede asumirse que con esta restricción se cubre el espectro de dinámicas de interés para el estudio de las componentes W_t . En todo caso, es de esperar que la fuerte relación del incumplimiento con el ciclo económico haga que, habitualmente, las series de HR presenten una fuerte autocorrelación, por lo que la asunción de que $E[X_{s/t}] \approx x_t$ tampoco es, desde un punto de vista práctico, restrictiva.

En lo que respecta a la segunda restricción, si bien es factible la existencia de series de HR con comportamiento heterocedástico, en tal caso la distinta varianza condicional

¹ Por simplicidad, se asume que las distribuciones condicionales $X_{s/t}$ tienen soporte en \mathbb{R} , siendo el desarrollo seguido similar para cualquier intervalo abierto $A \subset \mathbb{R}$.

de las variables $X_{s/t}$ se traduciría de forma inmediata en varianzas no constantes de las componentes W_t a lo largo de la ventana, en función de la dinámica que siga la varianza condicional de x_t . Un análisis de mayor interés puede obtenerse entonces restringiendo esta fuente de variación.

Asumiendo en lo que sigue que la dinámica subyacente cumple las dos condiciones anteriores, W_t se puede aproximar en el entorno del punto (x_t, \dots, x_t) por:

$$\begin{aligned} W_t &= W_t(X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^Q (1 - N(X_{s/t})) \\ &\approx 1 - (1 - N(x_t))^Q + n(x_t) (1 - N(x_t))^{Q-1} \sum_{s=1}^Q (X_{s/t} - x_t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tomando el operador esperanza sobre esta aproximación y teniendo en cuenta la primera restricción, se obtiene que:

$$E[W_t] \approx 1 - (1 - N(x_t))^Q \quad (5.6)$$

puesto que $E[X_{s/t}] \approx x_t$.

De igual forma, aplicando el operador varianza y considerando la segunda restricción, se obtiene que:

$$V[W_t] \approx \left(n(x_t) (1 - N(x_t))^{Q-1} \right)^2 v \quad (5.7)$$

donde:

$$v = V \left[\sum_{s=1}^Q (X_{s/t} - x_t) \right] = V \left[\sum_{s=1}^Q X_{s/t} \right] \quad (5.8)$$

no lleva subíndice temporal por ser x_t homocedástico.

Antes de analizar las implicaciones de las aproximaciones (5.6) y (5.7), cabe señalar que (5.5) puede mejorarse añadiendo más términos al polinomio de Taylor. De hecho, la aproximación (5.5) se ve mejorada si se incorpora el término de segundo orden, aprovechando que el primero desaparece al aplicar el operador esperanza. No obstante, se ha considerado más conveniente, a los efectos de este capítulo, una aproximación de grado 1 puesto que (i) el objetivo no es una aproximación numérica a los momentos, sino el análisis de la evolución de las métricas de riesgo a lo largo del tiempo y la relación de esta evolución con x_t , o, equivalentemente, con $h_t = N(x_t)$, para lo que es suficiente una aproximación de orden 1, (ii) el aumento del grado de la aproximación complica el álgebra y el consiguiente análisis con términos cuyo error por omisión es cada vez menor, y (iii) una aproximación de grado 1 para ambos momentos supone un marco de referencia común.

5.2.3. Análisis de la media

Puesto que $x_t = N^{-1}(h_t)$, se tiene que:

$$E[W_t] \approx 1 - (1 - h_t)^Q \quad (5.9)$$

Esta expresión es una función creciente del valor del HR en t . Ello implica que cuanto mayor es el valor de HR, mayor es la PD condicional esperada de la unidad y, en consecuencia, mayor es la pérdida esperada condicional.

Esta relación entre la serie de HR y la media de las componentes W_t resulta razonable y pone de manifiesto que la pérdida esperada no permanece constante a lo largo del tiempo y que, por tanto, las provisiones necesarias para cubrirlas tampoco. Ello induce a considerar un esquema de provisión dinámico, como se discute en el apartado 5.3.2.

5.2.4. Análisis de la volatilidad

La aproximación (5.7) puede formularse en términos de h_t como:

$$V[W_t] \approx \left(n(N^{-1}(h_t)) (1 - h_t)^{Q-1} \right)^2 v \quad (5.10)$$

lo que en términos de su desviación típica queda:

$$S[W_t] \approx n(N^{-1}(h_t)) (1 - h_t)^{Q-1} \sigma \quad (5.11)$$

con $\sigma = \sqrt{v}$.

El estudio analítico de la expresión (5.11) no es inmediato, por lo que resulta más conveniente, sin pérdida de rigor, considerar su representación gráfica. La Figura 5.1 muestra, para valores de $Q = 1, \dots, 6$ y $0 < x < 1$, la gráfica de la función:

$$f(x) = n(N^{-1}(x)) (1 - x)^{Q-1} \quad (5.12)$$

que se corresponde con la aproximación (5.11) suponiendo, sin pérdida de generalidad, que σ es igual a 1 en todos los casos.

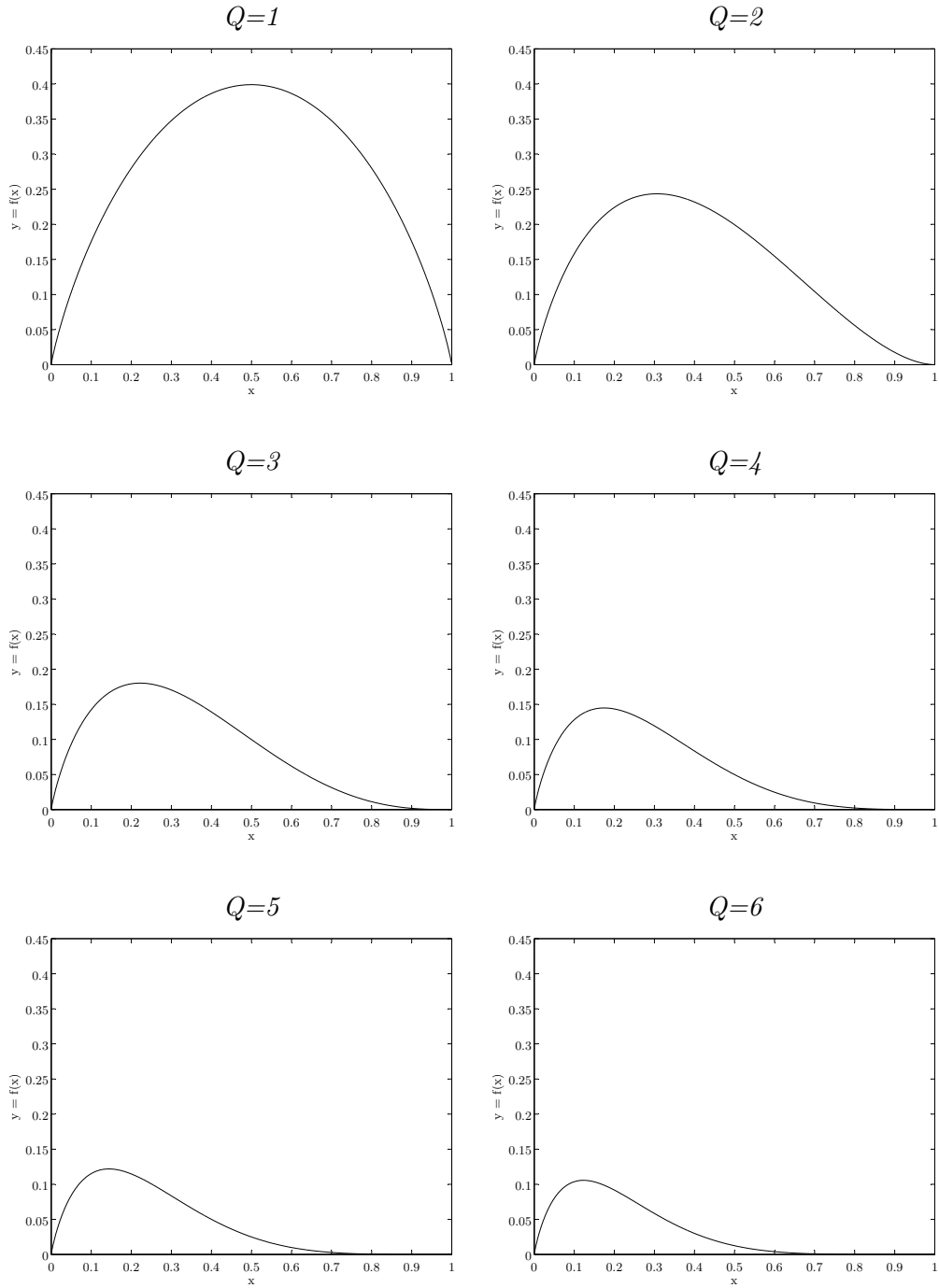


Figura 5.1: Gráfica de la función $f(x) = n(N^{-1}(x))(1-x)^{Q-1}$, $0 < x < 1$, para $Q = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

De los seis gráficos anteriores pueden extraerse dos características principales de interés sobre la evolución de la volatilidad de las componentes W_t a lo largo de la ventana, según la aproximación (5.5): (i) la volatilidad no es constante y presenta un comportamiento monótono creciente en el HR para valores bajos de éste, y (ii) alcanza un máximo interior.

En lo que respecta al primer punto, la volatilidad no es constante puesto que varía a lo largo del tiempo como función de la serie h_t . Ello implica que las métricas condicionales que dependen de la volatilidad también varían y que el efecto del ciclo económico en las mismas se produce a través de h_t . Es decir, la evolución del ciclo económico influye sobre las principales variables macroeconómicas, las cuales afectan a la capacidad de pago, que determina la serie h_t , y finalmente la serie h_t influye sobre las métricas de riesgo condicionales que dependen de la volatilidad de W_t .

La Figura 5.2 muestra la evolución de la dispersión de W_t a lo largo de la ventana de cálculo para las seis unidades de riesgo norteamericanas, mientras que la Figura 5.3 compara las distribuciones condicionales asociadas a dos periodos distintos, 1995Q3 (expansivo) y 2009Q3 (recesivo). La dinámica subyacente empleada es la dada por los modelos ARIMA presentados en el apartado 4.2.2.1, modelos que son I(1) y homocedásticos, por lo que cumplen las restricciones consideradas en el apartado 5.2.2. El comportamiento observado en ambas figuras responde a la evolución predicha por el desarrollo analítico precedente: aumento de la dispersión ligado al aumento del HR.

En lo que respecta al segundo punto, la existencia de un máximo interior, supone que la relación entre h_t y la volatilidad de W_t no es monótona. Así, fijado el horizonte de cálculo, existe un valor de h_t , $\hat{h} = \hat{h}(Q)$, $0 < \hat{h} < 1$, en donde se alcanza el máximo. Por ejemplo, para $Q = 1$, \hat{h} es igual a 0,5 en el caso de que σ sea igual 1, puesto que la función de densidad de la Normal(0,1) alcanza su máximo en 0.

En la práctica, es de esperar que $0 < h_t < \hat{h}$, ya que las series de HR suelen tomar valores muy bajos. Ello implica una relación positiva entre el HR de la unidad y su riesgo de incumplimiento sistémico condicional, es decir, el recogido en la distribución W_t . No obstante, en un momento de profunda recesión, en el que h_t crezca significativamente hasta superar el umbral \hat{h} , puede observarse, paradójicamente, una reducción de las métricas de riesgo condicionales dependientes de la volatilidad de W_t . Este resultado (i) es útil para comprender por qué el riesgo sistémico puede disminuir tras un aumento del HR de la unidad, y (ii) hubiera sido difícil de obtener sin un marco analítico por resultar poco intuitivo².

² Puesto que cabría esperar, al menos inicialmente, que una dinámica subyacente homocedástica conllevara unas distribuciones condicionales W_t con varianza constante.

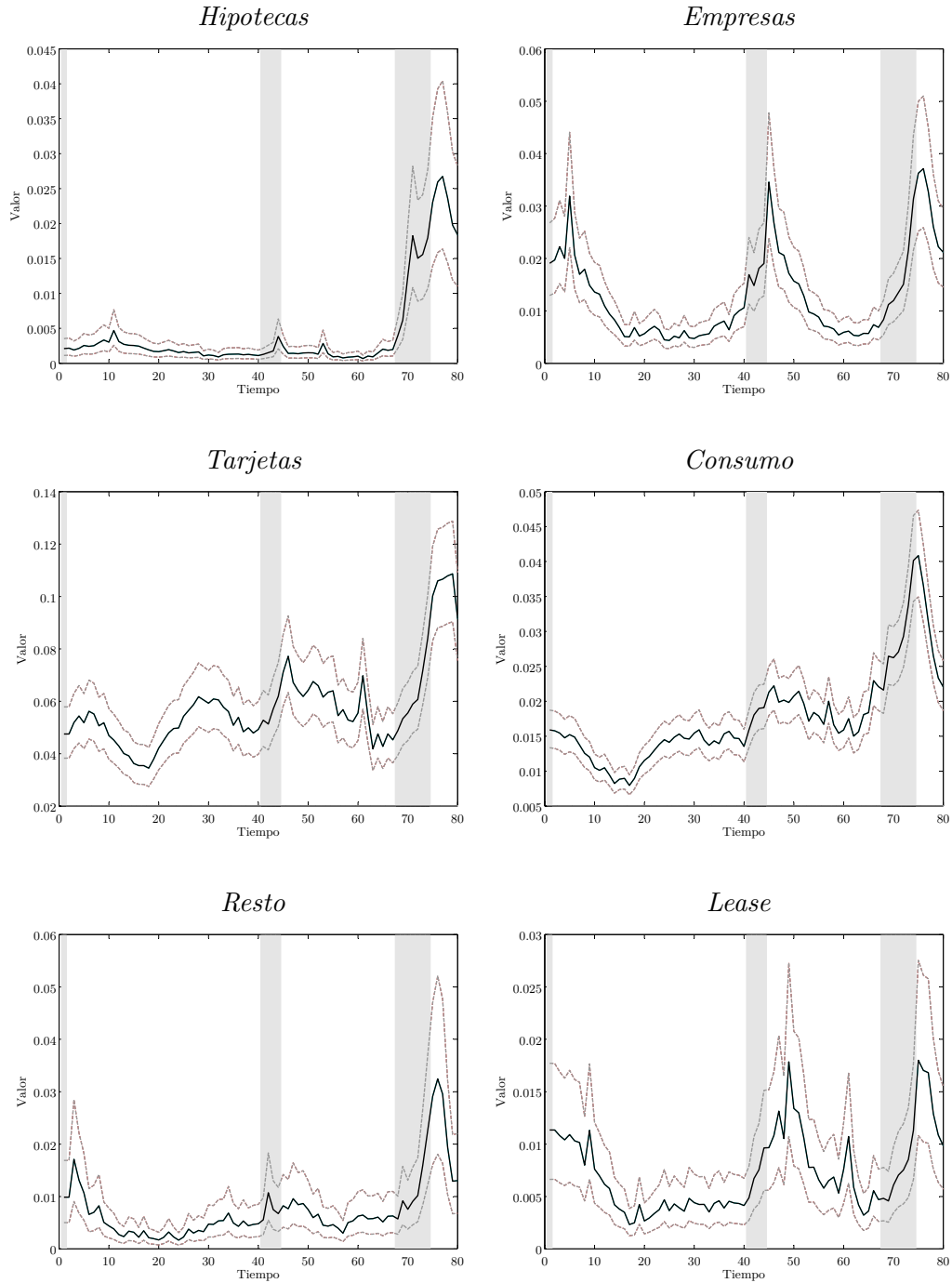


Figura 5.2: Percentiles 5 y 95 de la distribución W_t a horizonte anual (líneas pespunteadas) junto con su valor medio (línea continua). La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

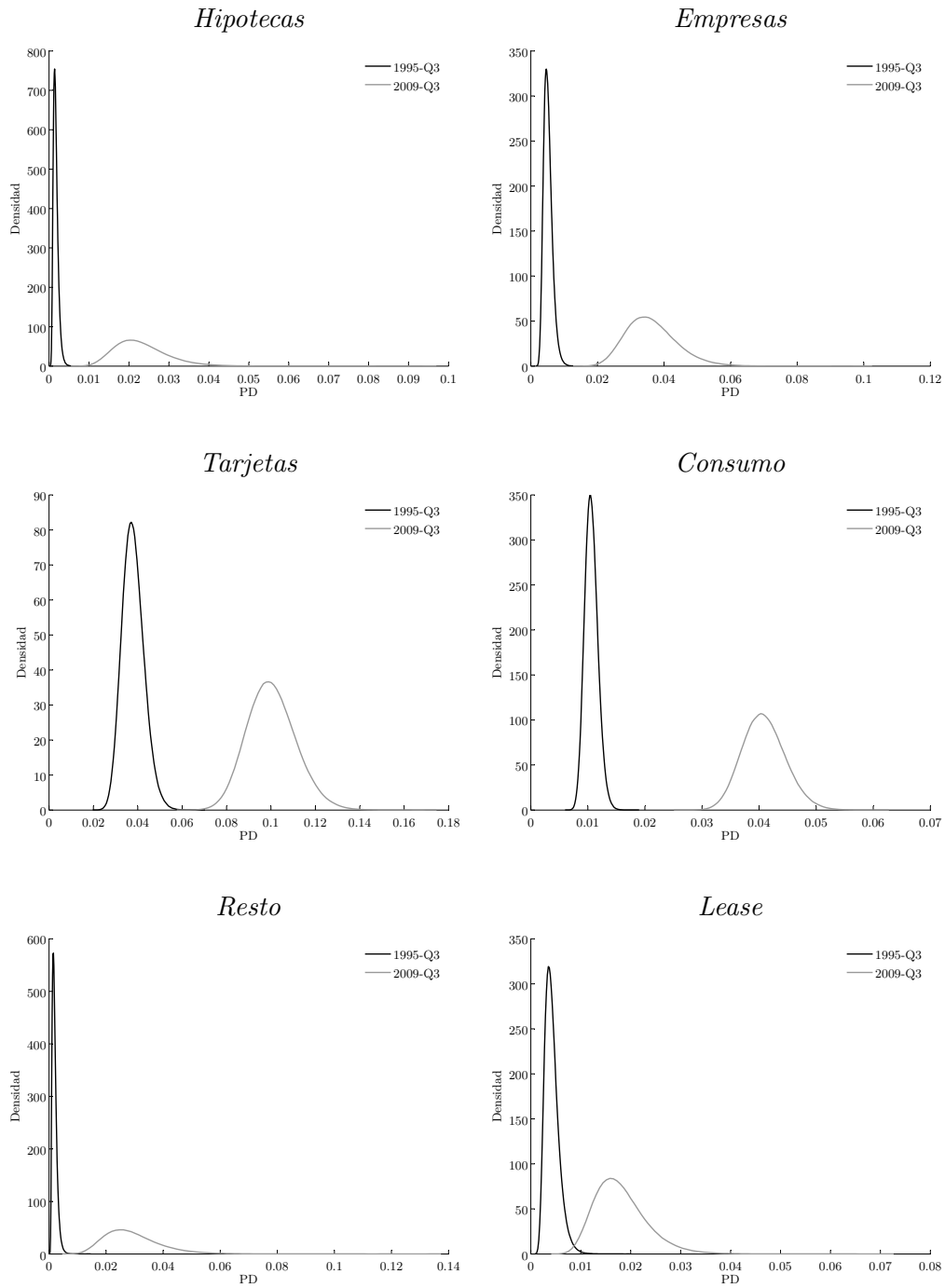


Figura 5.3: Distribuciones condicionales W_t a horizonte anual en 1995Q3 y en 2009Q3.

El origen de este efecto se encuentra en la no linealidad de $\tilde{\mathcal{F}}$, en especial en lo debido a la función $N(\cdot)$, que transforma las variables $X_{s/t}$ en $Y_{s/t}$. Así, si W_t se definiese sobre las sendas futuras de h_t , y no sobre las sendas futuras de x_t , de forma que viniese dada por las distribuciones condicionales de h_t , $H_{s/t}$, $s = 1, \dots, Q$,

$$W_t = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - H_{s/t}) \quad (5.13)$$

entonces, bajo la asunción de que h_t es homocedástico y cuenta con fuerte persistencia, se obtendría también, bajo una aproximación lineal similar a (5.5), que:

$$S[W_t] \approx (1 - h_t)^{Q-1} \sigma \quad (5.14)$$

con $\sigma = \sqrt{v}$ y siendo en este caso σ^* la desviación típica de $\sum_{s=1}^Q H_{s/t}$.

La volatilidad de las componentes W_t bajo esta especificación tampoco es constante, pero sí monótona, como muestran los seis gráficos de la Figura 5.4, obtenidos para la función $g(x) = (1 - x)^{Q-1}$, $0 < x < 1$, en los que se aprecia una relación monótona decreciente.

Ello que implica que, si se prescinde de la función de enlace para W_t , se cumple que a menor valor de h_t , mayor valor de $S[W_t]$. Este hecho también resulta destacable puesto que indica que el riesgo sistémico decrece con el aumento del HR para horizontes superiores a 1. Para $Q = 1$ se obtiene el resultado inicialmente esperable: volatilidad constante de las distribuciones condicionales W_t .

En resumen, la relación observada entre h_t y $S[W_t]$, derivada de la aproximación (5.5) y corroborada empíricamente, se debe a (i) el marco multiperiodo, y (ii) el empleo de una función de enlace probit en la dinámica subyacente, elección que es consecuencia de la asunción de normalidad en el modelo de función índice que subyace al modelo propuesto³. En particular, si $Q = 1$ y si se prescinde de la función de enlace, dicha relación desaparece y $S[W_t]$ es constante. Este resultado también es relevante para comprender la influencia de la función de enlace y el horizonte de cálculo en las métricas de riesgo condicionales.

³ Asunción que forma parte de la aproximación habitual a la modelización de los eventos dicotómicos, como es el impago, según se señala en el Apéndice C.

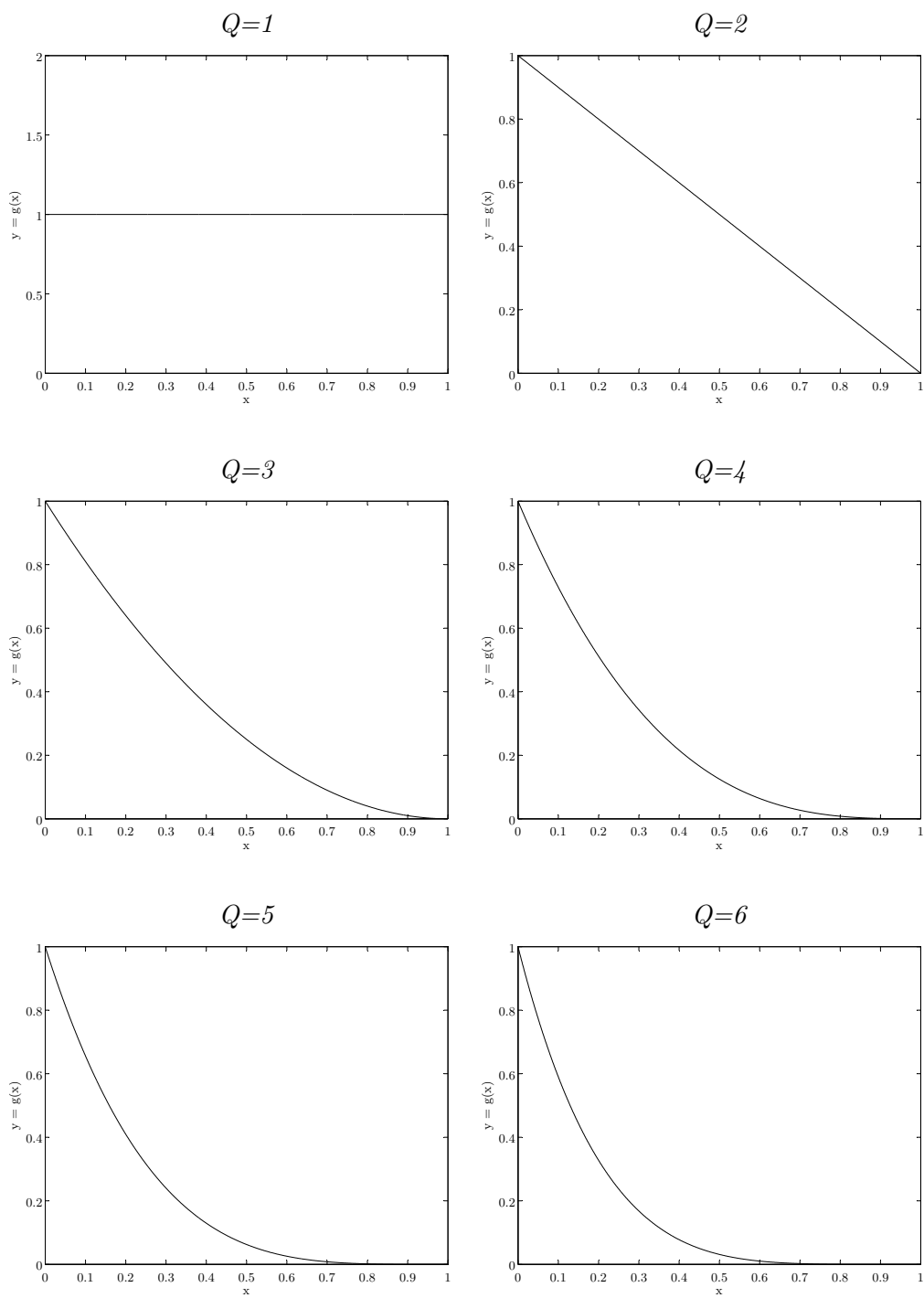


Figura 5.4: Gráfica de la función $g(x) = (1-x)^{Q-1}$, $0 < x < 1$, para $Q = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 .

Cabe señalar que este efecto ayuda a explicar los resultados obtenidos en el apartado 4.5, en los que se observaba que las cifras de pérdida esperada y VaR eran mayores en la ventana final (2001Q1-2010Q4) que en la inicial (1991Q1-2000Q4) y en la ventana reducida (2008Q1-2010Q4) que en la completa (1991Q1-2010Q4), sin embargo, la cifra de capital sólo aumentaba de forma clara en la primera comparación.

Para ello, basta considerar el siguiente ejemplo estilizado: nivel de cobertura igual a 90 y una ventana formada por dos periodos, $t = 1$ y $t = 2$, donde la distribución condicional de PD en el primer periodo, W_1 , sigue una distribución uniforme en el intervalo (0,0,1) y en el segundo periodo, W_2 , sigue una distribución uniforme en el intervalo (0,1,0,3). El primer periodo puede asemejarse a un periodo expansivo (baja media y volatilidad de W_1) y el segundo a un periodo recesivo (media y volatilidad de W_2 elevadas). Las cuatro distribuciones consideradas en 4.5 (inicial, final, completa y reducida) pueden identificarse ahora con W_1 , W_2 , Π (mixtura uniforme de W_1 y W_2) y W_2 . Es inmediato comprobar que las cifras pérdida esperada, VaR y capital asociadas a cada una son las dadas en la Tabla 5.1.

<i>Ventana</i>	<i>Distribución</i>	μ	η_{90}	k_{90}
Inicial	W_1	0,0500	0,0900	0,0400
Final	W_2	0,2000	0,2800	0,0800
Completa	Π	0,1250	0,2600	0,1350
Reducida	W_2	0,2000	0,2800	0,0800

Tabla 5.1: Métricas de riesgo en el ejemplo estilizado. W_1 se distribuye uniformemente en (0,0,1) y W_2 se distribuye uniformemente en (0,1,0,3). μ , pérdida esperada. η_{90} , VaR al 90. k_{90} , capital al 90.

Se reproduce el mismo comportamiento que en el apartado 4.5 y es claro ahora el porqué: al estar contenida la ventana reducida en la completa, el VaR crece menos al restringir la segunda a la primera de lo que lo hace la media, obteniéndose una reducción del capital. Es también claro que si las distribuciones condicionales W_1 y W_2 fueran iguales, entonces $W_1 = W_2 = \Pi$ y todas las métricas de riesgo (pérdida esperada, VaR y capital) serían iguales en las tres distribuciones. Es decir, el comportamiento observado en el apartado 4.5 se debe a (i) la distinta media y varianza de las distribuciones condicionales W_t , y (ii) el hecho de que la ventana reducida (2008Q1-2010Q4) esté contenida en la completa (1991Q1-2010Q4), mientras que la inicial (1991Q1-2000Q4) y la final (2001Q1-2010Q4) son disjuntas.

Por último, cabe destacar que la aproximación (5.5) puede emplearse también para aproximar la covarianza entre distribuciones condicionales de unidades de riesgo distintas:

$$Cov [W_t^j, W_t^k] \approx \left(n (N^{-1} (h_t^j)) (1 - h_t^j)^{Q-1} \right) \left(n (N^{-1} (h_t^k)) (1 - h_t^k)^{Q-1} \right) v^{jk} \quad (5.15)$$

con $v^{jk} = Cov \left[\sum_{s=1}^Q X_{s/t}^j, \sum_{s=1}^Q X_{s/t}^k \right]$, así como para aproximar su correlación:

$$Corr [W_t^j, W_t^k] = \frac{Cov [W_t^j, W_t^k]}{S [W_t^j] S [W_t^k]} \approx Corr \left[\sum_{s=1}^Q X_{s/t}^j, \sum_{s=1}^Q X_{s/t}^k \right] = \varsigma^{jk} \quad (5.16)$$

La primera es también una función creciente en h_t^j y h_t^k si $h_t^j < \hat{h}^j$ y $h_t^k < \hat{h}^k$, mientras que la segunda evidencia que la correlación condicional es, al menos en una aproximación de primer orden, constante, lo que sugiere centrar el análisis en la correlación de activos intraunidad y no en la interunidad.

5.3. Métricas de riesgo condicionales

5.3.1. Introducción

En este apartado se estudia empíricamente la evolución temporal de las métricas de riesgo condicionales⁴ de las seis unidades de riesgo estudiadas en el capítulo anterior en términos “incondicionales”: Hipotecas, Empresas, Tarjetas, Consumo, Resto y Lease.

Como dinámica subyacente se han empleado los modelos univariantes ARIMA presentados en 4.2.2.1, que cumplen, por ser I(1) y homocedásticos, las hipótesis sobre la dinámica subyacente planteadas en el apartado 5.2.2. Cabe señalar que en todos los casos los resultados obtenidos son consistentes con lo que predice el desarrollo analítico precedente, lo que respalda, al menos empíricamente, la bondad de la aproximación.

En un plano más general, los resultados empíricos obtenidos subrayan la importancia de las métricas de riesgo condicionales como registro de la evolución del riesgo de incumplimiento a lo largo del tiempo, y con ello la conveniencia de que sean consideradas por las entidades en su gestión del riesgo de incumplimiento, así como reportadas a supervisores e inversores como parte de la información relevante sobre la solvencia de éstas.

5.3.2. Media condicional

La Figura 5.5 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR con la de la media condicional de W_t . Se observa un notorio comportamiento afín entre ambas series, como se deriva del desarrollo analítico efectuado en el apartado 5.2.

⁴ μ , pérdida esperada; $\eta_{99,9}$, VaR al 99,9; $\eta_{99,97}$, VaR al 99,97; $k_{99,9}$, capital al 99,9, $k_{99,9} = \eta_{99,9} - \mu$; $k_{99,97}$, capital al 99,97, $k_{99,97} = \eta_{99,97} - \mu$; ρ , correlación de activos, $\rho = V [N^{-1} (W_t)] / (1 + V [N^{-1} (W_t)])$.

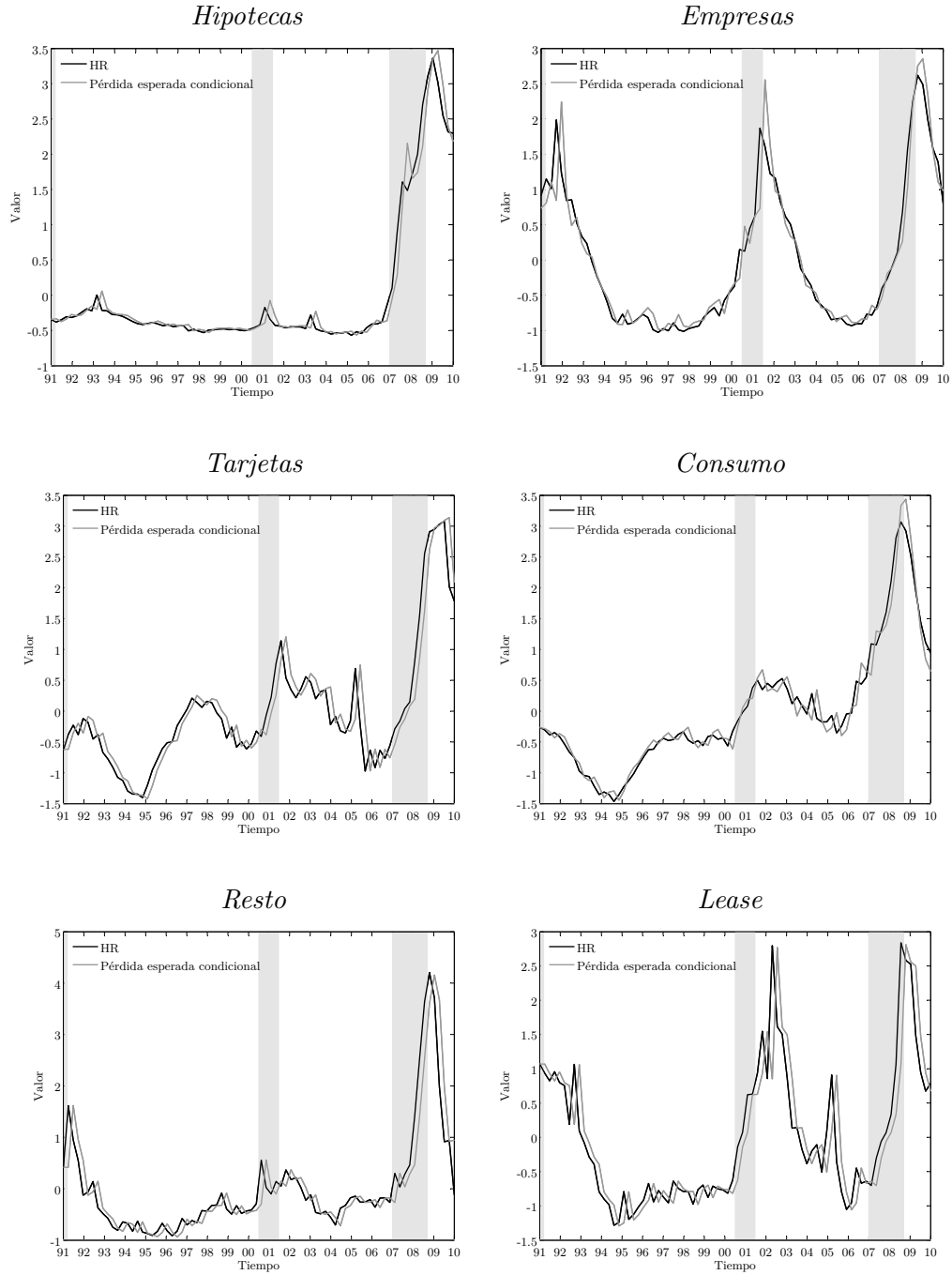


Figura 5.5: Series de HR y media de W_t a horizonte anual. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

Este resultado (i) es coherente con estudios empíricos previos, como los de [106], [141], [139] y [143], entre otros, (ii) subraya que es posible que para dos unidades de riesgo, j y k , se cumpla que $E[\Pi^j] \approx E[\Pi^k]$ y sin embargo la variabilidad a lo largo de la ventana de cálculo de la media de las distribuciones condicionales W_t^j y W_t^k sea distinta, lo que permite distinguir a las unidades de riesgo por su grado de “estabilidad” a lo largo del ciclo, y (iii) sugiere, como discuten [109] y [144], la consideración de un esquema de provisiones que suavice la dotación a lo largo del tiempo y alivie la dificultad que supone para las entidades incrementar ésta significativamente en los peores periodos del ciclo.

Para comprender el alcance del tercer punto, basta notar que $T\mu = \sum_{t=1}^T \mu_t$, por lo que es posible formular dos esquemas de provisión: (i) uno de carácter cíclico, donde en cada periodo se provisiona μ_t , generada a partir de una dotación al fondo de reserva de igual cantidad, y (ii) otro “acíclico”, donde en cada periodo también se provisiona μ_t , cantidad que en esta ocasión se obtiene de un fondo de reserva para el que se dota, en cada periodo, μ .

Si S_t^c denota el fondo cíclico y S_t^a el acíclico, con S_0 el valor dotado para ambos al inicio, entonces:

$$S_t^c = S_{t-1}^c + \mu_t - \mu_t = S_{t-1}^c = S_0 \quad (5.17)$$

$$S_t^a = S_{t-1}^a + \mu - \mu_t = S_0 + \sum_{l=1}^t \mu - \mu_l \quad (5.18)$$

Es inmediato comprobar que (i) $S_T^c = S_T^a = S_0$, (ii) en ambos casos la cantidad provisionada es la misma a lo largo del ciclo e igual a $T\mu$, y (iii) para que el fondo S_t^a sea autosuficiente, debe cumplirse que $S_{t-1}^a > \mu_t - \mu$ a lo largo de toda la ventana, lo que puede requerir valores elevados de S_0 si el ciclo comienza con valores de pérdida esperada condicional mayores que la media “incondicional”.

La diferencia entre ambos esquemas estriba en que, mientras en el primero el fondo es constante y lo que varía es la dotación, en el segundo caso es el fondo el que varía, siendo constante la dotación, por lo que no se requiere dotar más en los peores momentos del ciclo, con la dificultad que ello puede conllevar. Es decir, S_t^a suaviza los requerimientos de provisiones a lo largo del ciclo.

En todo caso, las consideraciones sobre no estacionariedad e influencia de la ventana de cálculo discutidas en el Capítulo 3 aplican aquí también: el fondo S_t^a asume que el ciclo que enfrenta la entidad es similar al considerado en la ventana de cálculo, lo que supone una hipótesis irreal, en especial en el caso de no estacionariedad del HR. Este hecho puede requerir una gestión activa del fondo según el ciclo realizado se aleje del empleado para su calibración. Además, puesto que μ y μ_t son valores esperados⁵, en la práctica puede ser necesario corregir en cada periodo la desviación observada en el

⁵ Se trata por tanto de un enfoque *forward-looking*, como los propuestos por el IASB (*International Accounting Standards Board*, <http://www.ifrs.org/Home.htm>) y el FASB (*Financial Accounting Standards Board*, <http://www.fasb.org/home>) a raíz de la Gran Recesión.

anterior.

5.3.3. VaR condicional

La Figura 5.6 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR con la del VaR condicional de W_t . Se observa, como en el caso de la media condicional, un notorio comportamiento afín entre ambas series.

Esta relación es consecuencia de dos efectos: (i) el desplazamiento cíclico de la media de W_t , apreciado en la Figura 5.5, y (ii) la variación también cíclica de la volatilidad de dicha distribución si el HR toma valores suficientemente bajos, según se deriva del desarrollo analítico discutido en el apartado 5.2 y corroborado en la Figura 5.2. Cabe señalar que si h_t superase el umbral \hat{h} ambos efectos influirían de forma opuesta sobre el VaR condicional: un aumento de h_t supondría un aumento de la media, lo que supone un VaR mayor, pero también una disminución de la volatilidad de W_t , lo que supone un VaR menor.

5.3.4. Capital condicional

La Figura 5.7 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR con la del capital condicional de W_t . Se observa también un significativo comportamiento afín entre ambas series.

Este comportamiento es consistente con la aproximación (5.11) y con el hecho de que mayor dispersión en la distribución de pérdidas acarrea mayor diferencia entre pérdida esperada y VaR, y en consecuencia mayor capital.

Así, los periodos en los que h_t toma valores más altos son también los periodos en los que se materializan las pérdidas inesperadas condicionales más elevadas. Ello muestra que pérdida esperada e inesperada están alineadas: ambas magnitudes crecen cuando la serie de HR crece, y viceversa. Este hecho tiene una relevancia notable, puesto que muestra que el capital no sólo presenta un comportamiento cíclico como consecuencia de la migración de los deudores hacia unidades vinculadas a mayores tasas de impago en los peores momentos del ciclo, y viceversa, sino que, dada una unidad de riesgo, la propia distribución de PD condicional incrementa su volatilidad como consecuencia del aumento del HR.

Cabe señalar que el carácter cíclico de los requerimientos propios en ejercicios empíricos ya ha sido apuntado por otros autores, como [143], [139], [106], [131] y [161], entre otros. No obstante, el análisis precedente supone una aportación al estudio de esta ciclicidad puesto que evidencia que (i) es la serie de HR la que determina, en un marco multiperiodo con función de enlace probit, el carácter cíclico en términos de riesgo sistémico, y (ii) dicha ciclicidad puede aparecer aún cuando x_t siga una dinámica homocedástica.

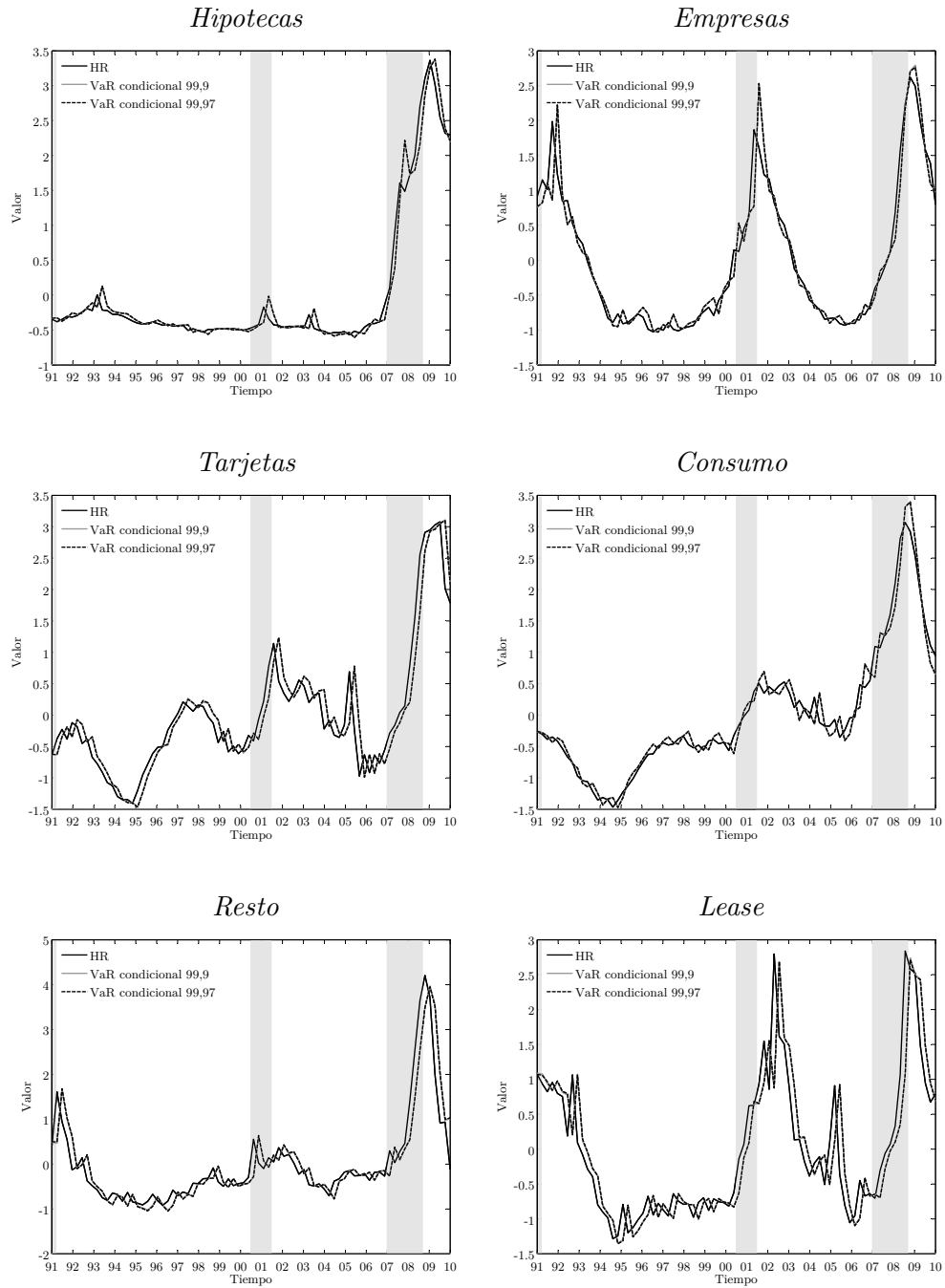


Figura 5.6: Series de HR y percentiles 99,9 y 99,97 de W_t a horizonte anual. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

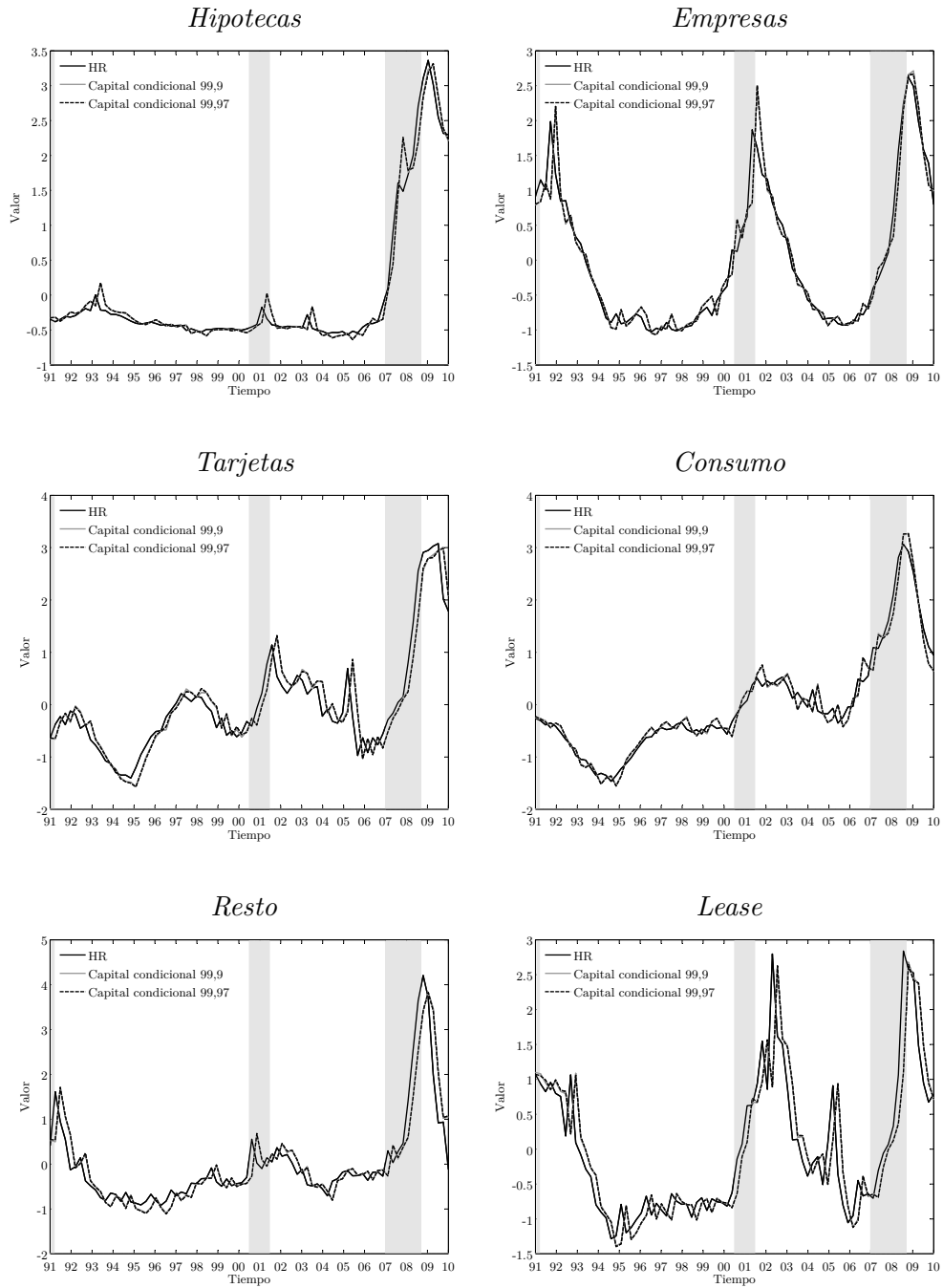


Figura 5.7: Series de HR y capitales 99,9 y 99,97 de W_t a horizonte anual. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

5.3.5. Correlación de activos condicional

La Figura 5.8 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR con la de correlación condicional de W_t . Se observa también una evolución similar de ambas series, si bien en esta ocasión la segunda cuenta con mayor ruido. En todo caso, este resultado es coherente con el desarrollo analítico del apartado 5.2, puesto que la correlación de activos condicional, $\rho_t = V[N^{-1}(W_t)] / (1 + V[N^{-1}(W_t)])$, guarda una relación monótona creciente con la varianza de W_t .

Cabe señalar dos aspectos sobre este resultado.

Primero, enlaza con dos cuestiones muy relevantes en el estudio del riesgo de incumplimiento: si la correlación es o no constante a lo largo del ciclo económico, y si esta propiedad depende de la homogeneidad de la varianza condicional de la serie de HR. Los resultados obtenidos muestran que (i) la correlación de activos condicional sí cambia a lo largo del tiempo, (ii) lo hace como consecuencia de la relación entre la varianza de W_t y la serie h_t , y (iii) ello puede producirse aún cuando la dinámica de h_t sea homocedástica.

Segundo, supone un avance en cuestiones ya apuntadas en algunos trabajos previos. Así, [38] obtiene empíricamente, a partir de datos de deudores *subprime*, que PD y correlación de incumplimiento guardan una relación positiva, lo que puede inducir un efecto cíclico. No obstante, no establece una relación de causalidad entre el HR, PD esperada y correlación. Por otra parte, [117] y [45] observan un patrón cíclico en las correlaciones y proponen la modelización explícita de su dinámica, el tercero considerando variables explicativas. Sin embargo, el análisis efectuado muestra que una dinámica homocedástica para el HR puede ser suficiente para obtener este efecto, puesto que lo causan el marco multiperiodo y la función de enlace $N(\cdot)$.

Además, [114] observa que la correlación varía con el tiempo de forma cíclica y asimétrica, es decir, crece más y más rápido en épocas malas de lo que decrece en épocas buenas. Sin embargo, no nota que dicho efecto puede deberse a la propia asimetría que suelen presentar las series de HR. Por último, [140] observa que el parámetro β del modelo de Vasicek, $V = N\left(\frac{N^{-1}(\alpha) - \sqrt{\beta}z}{\sqrt{1-\beta}}\right)$, que determina la correlación de activos bajo este modelo, toma un valor menor a nivel condicional que incondicional, pero no nota que, aunque el primero sea constante a lo largo de la ventana, la distribución de PD condicional puede tener varianza no constante a lo largo del tiempo.

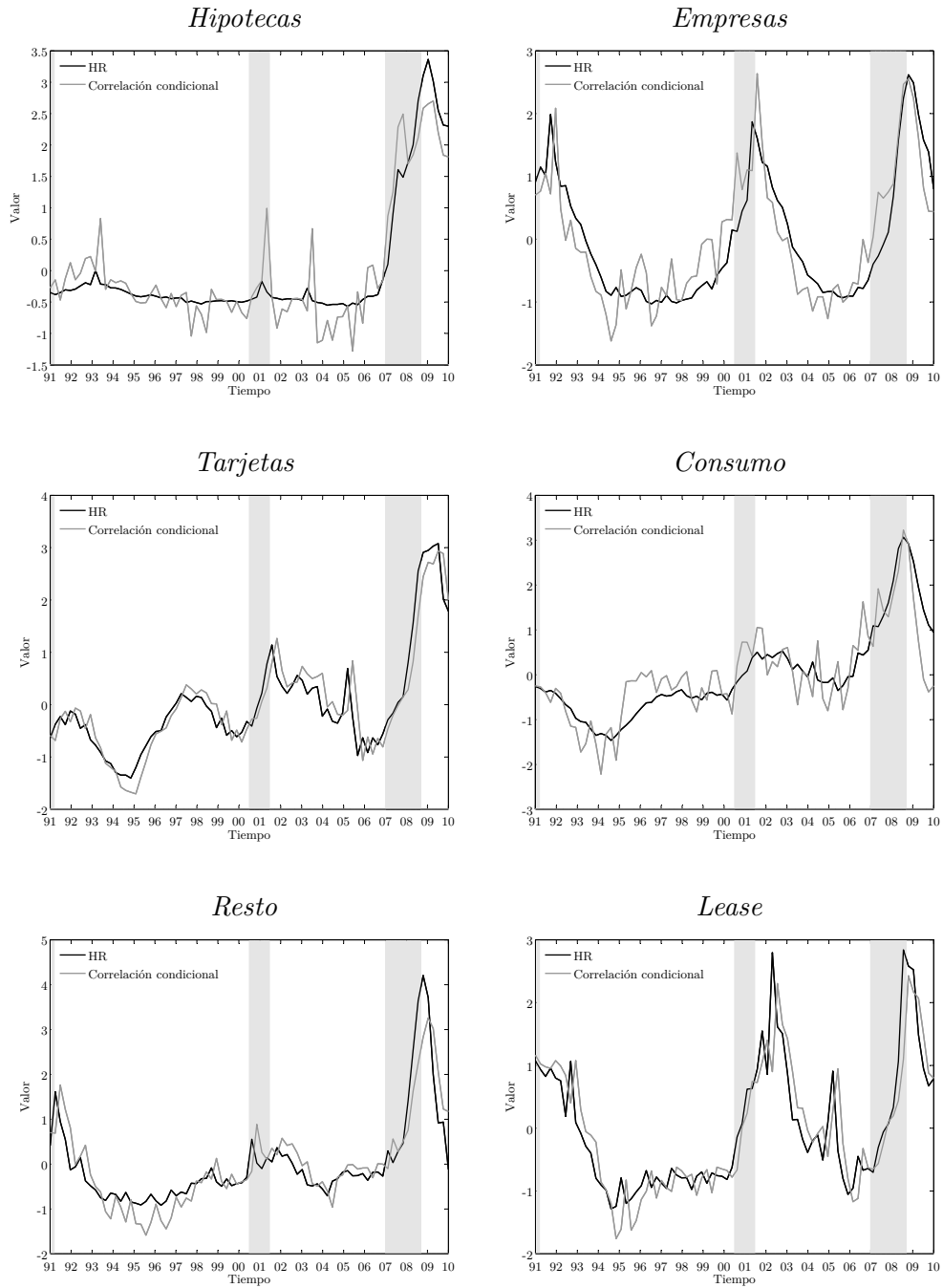


Figura 5.8: Series de HR y correlación de activos de W_t a horizonte anual. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

5.4. Fijación del nivel de cobertura con base condicional

5.4.1. Introducción

En este apartado se discute la posibilidad de definir el nivel de cobertura “incondicional” o de “ciclo económico completo” a partir de las distribuciones condicionales W_t y sus respectivos niveles de cobertura. Este proceso supone, en contra de la aproximación predominante, emplear las distribuciones condicionales para determinar un aspecto “incondicional”. Ofrece además información relevante sobre la solvencia de la entidad a lo largo del ciclo económico.

Como se señaló en el apartado 2.2, en la práctica los accionistas de la entidad deciden el nivel de cobertura con el que calcular la cifra de recursos propios en función del rating de agencia que desean obtener. En el caso de la medición “incondicional”, ello conlleva escoger un valor de u acorde con el rating de “ciclo económico completo” perseguido. Determinado dicho rating y con él u , la cifra de VaR “incondicional”, η , se obtiene según el proceso de cálculo escogido.

En una aproximación a la determinación del nivel de cobertura “incondicional” desde las distribuciones condicionales la elección sería similar, salvo por el hecho de que se sustentaría en los niveles de cobertura condicionales: los accionistas escogerían, para cada periodo de la ventana de “ciclo económico completo”, el rating de agencia, en este caso condicional, que desean acreditar, es decir, un nivel de cobertura condicional *deseado*, u_t^* . El nivel de cobertura “incondicional” se obtendría entonces como la media de los T niveles condicionales deseados, u_1^*, \dots, u_T^* . Dado u , se procedería al cálculo del VaR “incondicional”, η , según sucede en el proceso estándar.

Esta idea, y el desarrollo que se deriva de ella, contribuyen al estudio de la elección del nivel de cobertura puesto que (i) muestran que dicha elección puede ser abordada a través de las distribuciones condicionales, (ii) discuten la diferencia entre la cobertura condicional perseguida por la entidad y la finalmente obtenida, y (iii) permiten eslarrecer la relación entre la solvencia condicional e incondicional. [133] también observa que el nivel de cobertura de una misma cifra de recursos propios varía en función del ciclo económico, pero no trata ninguno de los puntos anteriores.

5.4.2. Discusión

En lo que sigue, la discusión se presenta a nivel individual en términos de Π y W_t , siendo inmediata su interpretación a nivel cartera y en términos de L y L_t , las distribuciones de pérdida en el modelo dado por la ecuación (2.6) con distribución F igual a Π y W_t , respectivamente.

Sean $u \in (0, 1)$ y $\eta \in (0, 1)$ tales que:

$$P(\Pi < \eta) = u \quad (5.19)$$

Es inmediato obtener que:

$$u = P(\Pi < \eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P(W_t < \eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t \quad (5.20)$$

con:

$$u_t = P(W_t < \eta) \quad (5.21)$$

Por tanto,

- Dado u , y con él calculado η , se puede definir el vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$ de niveles de cobertura condicionales *esperados*, $u_t = P(W_t < \eta)$.
- A su vez, dado un vector $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_T^*)$ de niveles de cobertura condicional *deseados*, se puede establecer u como $u = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^*$.

La distinta denominación entre los niveles de cobertura inicialmente elegidos por los accionistas, niveles de cobertura condicional *deseados*, y los finalmente obtenidos al enfrentar η a cada distribución condicional, niveles de cobertura condicional *esperados*, se debe a que, en el caso general, $\mathbf{u}^* \neq \mathbf{u}$, puesto que la relación entre u y los vectores \mathbf{u}^* y \mathbf{u} no es unívoca.

Este hecho subraya que cuentan con una interpretación distinta. \mathbf{u}^* recoge la solvencia condicional que los accionistas desearían obtener a lo largo de la ventana de cálculo y que acaba determinando el nivel de solvencia “incondicional”, mientras que \mathbf{u} recoge la solvencia condicional esperada dado η , $\eta = \eta(u)$, en función de la evolución del HR a lo largo de la ventana de cálculo, evolución que queda fuera del control de los accionistas de la entidad. Dicho de otro modo, fijado el VaR “incondicional”, η , y la colección de distribuciones condicionales W_t , $t = 1, \dots, T$, los niveles de cobertura condicional quedan determinados.

En consecuencia, el proceso para determinar la cobertura “incondicional”, u , y con ello el VaR “incondicional”, η , consistiría en los siguientes pasos:

1. Elección, por parte de los accionistas de la entidad, del vector de niveles de cobertura condicional *deseados*, $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_T^*)$.
2. Dado \mathbf{u}^* , determinación del nivel de cobertura “incondicional” como $u = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^*$.
3. Dado u , estimación del VaR “incondicional”, η , según el procedimiento habitual.
4. Adicionalmente, dado η , cálculo de los niveles de cobertura condicional *esperados*, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, con $u_t = P(W_t < \eta)$, que informan de la cobertura condicional efectivamente alcanzada con η .

El resultado de este proceso es doble. Por un lado, se determina el nivel de cobertura “incondicional”, u , a través de las distribuciones condicionales W_t y los niveles de cobertura condicional deseados, $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_T^*)$. Por otro lado, se obtiene el vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, que informa del grado de cobertura condicional que ofrece el VaR “incondicional” sobre la ventana de cálculo considerada.

En lo que respecta a la determinación del nivel de cobertura “incondicional” con base en las distribuciones condicionales, este proceso (i) requiere que la entidad escoja el rating de agencia condicional que desea obtener en cada periodo de la ventana, y (ii) dota a los accionistas de mayor flexibilidad para establecer el perfil de riesgo de la entidad y hace de la determinación de u un proceso más estructural, puesto que en realidad lo que se determina es todo el vector $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_T^*)$.

El primer punto implica identificar, para cada periodo de la ventana “interna” (la empleada por la entidad), un periodo asimilable, en términos de escenario económico, en la ventana “externa” (la considerada por la agencia de calificación) del que obtener la probabilidad de impago que presenta el rating perseguido. Así, por ejemplo, si los accionistas pretenden un rating AA en un determinado escenario condicional, deben identificar qué probabilidad de impago presenta un AA en un escenario equivalente dentro de la ventana temporal empleada por la agencia. Es decir, el HR estimado por la agencia para el rating AA en el periodo asimilable al padecido por la entidad. La Figura 5.9 representa este proceso, que debe realizarse para cada nivel de cobertura condicional deseado, u_t^* , $t = 1, \dots, T$, y que puede resultar complejo puesto que ambas series de HR, la de la entidad y la de la agencia, pueden diferir en frecuencia, en longitud o en el intervalo temporal.

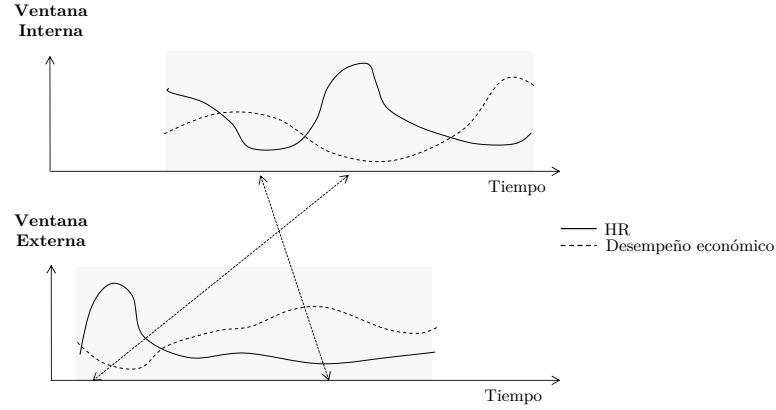


Figura 5.9: La obtención de ratings condicionales requiere asociar a cada periodo de la ventana interna (la considerada por la entidad) un periodo de la ventana externa (la considerada por la agencia de calificación) que resulte equivalente en términos de escenario económico.

Sobre el segundo punto cabe señalar que, en la medida en que los niveles de cobertura condicional deseados pueden alejarse de los finalmente esperados una vez se estima el VaR “incondicional”, η , la entidad se ve limitada en el establecimiento de su cobertura condicional. De hecho, garantizar que los niveles de cobertura esperados sean siempre mayores o iguales que los deseados, $u_t \geq u_t^*$, $t = 1, \dots, T$, conduce a tomar el VaR “incondicional” como $\eta = \max \{\eta_1^*, \dots, \eta_T^*\}$, siendo η_t^* el VaR condicional asociado

al nivel de cobertura condicional deseado u_t^* .

En lo que respecta al segundo resultado del proceso, los niveles de cobertura condicional esperados, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, éstos revelan la solvencia condicional de la entidad, lo que constituye información relevante sobre la cobertura efectiva que ofrece la cifra de VaR “incondicional” en distintos escenarios, así como sobre la estabilidad de dicha cobertura a lo largo del ciclo económico.

Ello sugiere el estudio de \mathbf{u} por parte de los organismos supervisores y su comunicación al mercado por parte de las propias entidades financieras. De hecho, resulta razonable plantear la publicación, de forma adicional al nivel de cobertura u , de alguna medida relativa a la dispersión del vector \mathbf{u} como, por ejemplo, su desviación típica. Ello permitiría representar la solvencia de “ciclo económico completo” de la entidad, materializada en el VaR “incondicional”, η , por medio de dos métricas: (i) la referida al propio valor de u , siendo la entidad más solvente cuanto mayor sea u , y (ii) la referida a la estabilidad de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, siendo la entidad más estable cuanto menor es la dispersión de \mathbf{u} . La publicación al mercado de las dos magnitudes podría, incluso, inducir a los accionistas de la entidad a ponderar ambas en la elección⁶ de η .

En cualquier caso, y más allá de la viabilidad técnica de esta aproximación, la discusión precedente evidencia que los niveles de cobertura condicionales pueden ser útiles en la gestión del riesgo de la entidad y que suponen información de interés para el mercado y los organismos supervisores, lo que aconseja su cálculo y difusión. Además, la metodología planteada abre la investigación a dos cuestiones: (i) la implementación del mapeo entre los periodos de las ventanas interna y externa, y (ii) la identificación de los determinantes de la estabilidad de la solvencia a lo largo del ciclo.

5.4.3. Análisis empírico

La Figura 5.10 compara, estandarizadas y para cada unidad, la serie de HR y las de nivel de cobertura condicional individual esperado para $\eta_{99,9}$ y $\eta_{99,97}$. Como dinámica subyacente se han considerado los modelos ARIMA presentados en el apartado 4.2.2.1 y como cifras de VaR “incondicional”, $\eta_{99,9}$ y $\eta_{99,97}$, las obtenidas en el apartado 4.4.

⁶ Puesto que u y η guardan una relación unívoca, su determinación admite dos interpretaciones equivalentes: la entidad elige la máxima pérdida potencial que está dispuesta a tolerar y con ello determina el nivel de cobertura, o bien la entidad elige el nivel de cobertura que desea satisfacer y con ello determina la máxima pérdida potencial que puede tolerar.

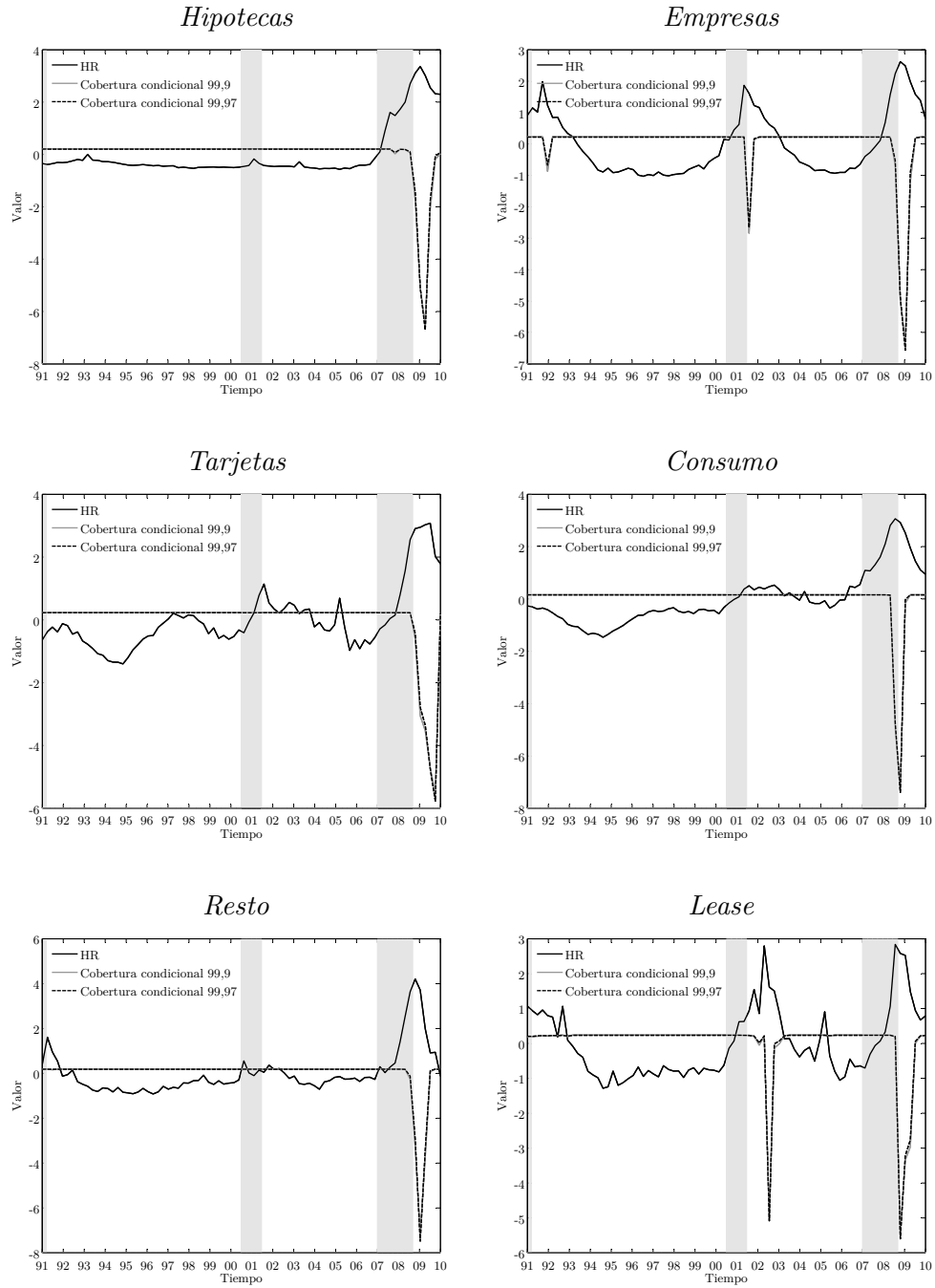


Figura 5.10: Series de HR y cobertura condicional esperada al 99,9 y 99,97, $u_t = P(W_t < \eta)$, a horizonte anual. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

Se aprecian dos aspectos.

Por un lado, para un mismo nivel de cobertura “incondicional” las unidades muestran una evolución semejante pero distinta en sus niveles de cobertura condicional. En general, dos unidades, j y k , pueden tener asociados vectores de niveles de cobertura condicional distintos, $\mathbf{u}^j \neq \mathbf{u}^k$, pese a que cuentan con un mismo nivel de cobertura “incondicional”, u . De igual forma, dos entidades con coberturas “incondicionales” similares pueden presentar coberturas condicionales diferentes, en especial en lo que respecta a la dispersión del vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$, de ahí la importancia de éste y de su comunicación a reguladores, accionistas e inversores como medida de la solvencia condicional de la entidad.

Por otro lado, en la mayoría de los periodos u_t es constante e igual a su máximo⁷, que es 1, y sólo en aquellos periodos en los que la serie de HR alcanza sus valores más altos se observan valores menores de u_t , lo que da lugar a un marcado efecto asimétrico. Este carácter asimétrico es consistente con el hecho de que Π excede $\eta_{99,9}$ y $\eta_{99,97}$ con una probabilidad significativamente mayor que cero gracias a un número reducido de componentes W_t , incluso en ocasiones a una sola, debido al elevado valor del nivel de cobertura, como representa la Figura 5.11.

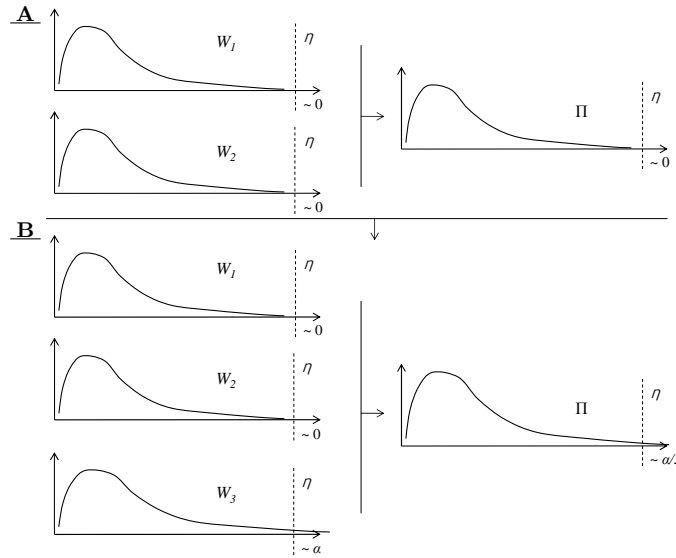


Figura 5.11: En (A), la ventana esta formada por dos periodos. Para ambas componentes, W_1 y W_2 , se cumple que la probabilidad de superar el umbral η es casi nula, por lo que la probabilidad de que la distribución Π lo supere es también casi nula. En (B), se añade a la ventana un nuevo periodo, cuya componente W_3 tiene una probabilidad de superar el umbral igual a $\alpha \gg 0$, lo que implica que η se convierte en el percentil $1 - \alpha/3$ de Π . Informalmente, puede decirse que es la componente W_3 la que “genera” dicho percentil.

Este resultado muestra que la cobertura que ofrece el VaR “incondicional” dismi-

⁷ Las distribuciones condicionales tienen soporte en el intervalo unidad, por lo que la probabilidad de superar cualquier umbral contenido en dicho intervalo es siempre estrictamente positiva. No obstante, en el caso de componentes asociadas a periodos con HR bajo y para umbrales elevados, dicha probabilidad resulta despreciable y en términos prácticos puede asumirse *casi nula*.

nuye significativamente, como cabría esperar, cuando se considera un escenario condicional adverso. La Tabla 5.2, en la que se detalla el mínimo de los niveles de cobertura condicional de la Figura 5.10, subraya este hecho.

<i>Unidad</i>	$\eta_{99,9}$	$\eta_{99,97}$
Hipotecas	0,9690	0,9893
Empresas	0,9707	0,9900
Tarjetas	0,9749	0,9921
Consumo	0,9543	0,9871
Resto	0,9612	0,9880
Lease	0,9782	0,9931

Tabla 5.2: Niveles de cobertura condicional mínimos, $\min_t u_t = P(W_t < \eta)$, para las cifras de VaR “incondicional” al 99,9, $\eta_{99,9}$, y al 99,97, $\eta_{99,97}$.

En términos del nivel de significación, $\alpha = 1 - u$, que puede interpretarse como una *probabilidad de quiebra* para la unidad de riesgo, el incremento es notable: en media, dicha probabilidad es 30 veces mayor para el VaR “incondicional” al 99,9 ($\alpha = 0,001$) y 10 veces mayor para el VaR “incondicional” al 99,97 ($\alpha = 0,0003$). Este marcado descenso pone de manifiesto dos puntos.

Primero, en el caso de que las agencias de calificación adopten una visión cíclica en la fijación de sus calificaciones, comportamiento para el que existe, como muestra [6], evidencia empírica positiva, la entidad puede ver disminuido su rating en un entorno recesivo, con el consiguiente agravamiento de su situación financiera, en particular de su capacidad de recapitalización, precisamente en el momento en el que debe recobrase de pérdidas elevadas y en el que el acceso al mercado de capitales o la generación orgánica de recursos resulta más difícil.

Este efecto puede retroalimentarse, conduciendo a nuevas bajadas de rating que compliquen aún más la recapitalización y por ello la solvencia de la entidad, cerrándose así un círculo que puede terminar en la quiebra de la entidad si las pérdidas elevadas se prolongan en el tiempo. Esta dinámica puede suceder aún cuando la cobertura “incondicional” sea elevada y sugiere contemplar, como también subrayan [31] y [57], horizontes de cálculo más elevados que la práctica habitual, un año, consecuentes con la sensibilidad del mercado a la solvencia condicional y la influencia que ello puede tener en la capacidad de recapitalización de la entidad en medio de un entorno desfavorable.

Segundo, lograr una cobertura condicional elevada a lo largo de todo el ciclo puede requerir de una cobertura “incondicional” prácticamente total, como muestra la Tabla 5.3, en la que se presenta la cobertura “incondicional” que ofrece el VaR condicional η_t correspondiente al mismo periodo que el considerado en la Tabla 5.2 para los niveles 99,9 y 99,97. Es decir, la cifra de recursos propios que garantizaría una cobertura condicional del 99,9 y del 99,97 en el periodo más desfavorable de la ventana.

<i>Unidad</i>	$\max_t \eta_{t, 99,9}$	$\max_t \eta_{t, 99,97}$
Hipotecas	0,999974	0,999990
Empresas	0,999967	0,999987
Tarjetas	0,999964	0,999994
Consumo	0,999975	0,999994
Resto	0,999982	0,999995
Lease	0,999956	0,999990

Tabla 5.3: Niveles de cobertura “incondicional” para las cifras de VaR condicional máximo, $u = P(\Pi < \max_t \eta_t)$, al 99,9 y al 99,97.

Los resultados obtenidos, con coberturas “incondicionales” superiores al 99,99, indican que, en general, resultará inviable, por su elevado coste, el planteamiento de una cifra de recursos propios constante a lo largo del tiempo que garantice, en un entorno económico profundamente desfavorable, una cobertura condicional similar a la que las entidades suelen considerar como razonable en términos “incondicionales”. Obviamente, en la medida en que la solvencia condicional de la entidad sea estable, es decir, el vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)$ presente poca dispersión, el coste marginal de asumir esta cifra de recursos propios, frente a la que se deriva de la cobertura “incondicional”, puede ser reducido y verse entonces compensado por las ventajas de disfrutar de una solvencia condicional elevada en momentos de stress. En todo caso, resulta evidente que la conciliación de la cobertura “incondicional” y la condicional no admite una solución sencilla.

Capítulo 6

Simulación de Monte Carlo

6.1. Introducción

En este capítulo se aborda la simulación de Monte Carlo de Π . El objetivo es diseñar un procedimiento de simulación más eficiente que la metodología estándar comentada en el apartado 3.4.3. Más eficiente supone lograr más precisión en la estimación de las métricas de riesgo con un coste computacional menor, aprovechando para ello la estructura de mixtura. Ello tiene un gran interés práctico, puesto que los elevados niveles de cobertura que se emplean habitualmente hacen difícil aunar agilidad y estabilidad en el proceso de cálculo.

Los algoritmos propuestos se sustentan y enmarcan en la línea de investigación de otros desarrollos como los de [76], [19], [79] y [125], entre otros. [134] esboza algunas de las ideas discutidas en este capítulo y, en términos más generales, [75] ofrece una completa revisión de la *cuestión computacional*. Como también sucede en estos trabajos, el interés se centra en la estimación eficiente del VaR, η , siendo¹ $P(F > \eta) = \alpha$, tanto porque es la métrica que determina el riesgo total, como porque la estimación de la media es, en general, abordable analíticamente².

El capítulo se estructura como sigue: en el segundo apartado se presenta el problema de la simulación eficiente de la distribución F , en el tercero se presenta el primer algoritmo de simulación eficiente propuesto, en el que se aprovecha la dimensión temporal de Π , y en el cuarto se propone una versión extendida que actúa sobre el espacio de innovaciones. Ambos se introducen en términos univariantes para clarificar la exposición y su aplicación a nivel multivariante se trata al final de cada apartado.

¹ A lo largo del capítulo se hace uso, en línea con el tratamiento habitual de la literatura sobre simulación eficiente, del nivel de significación, α , en vez del de cobertura, u , siendo en todo caso opciones equivalentes, puesto que $u = 1 - \alpha$.

² Como así sucede en el modelo de pérdida dado por la ecuación (2.6): $E[\tilde{L}] = \sum_{j=1}^M E[L^j]$ y $E[L^j] = E[F^j] \sum_{i=1}^{M^j} e^{ij}$.

6.2. Fundamentos de la simulación eficiente

Como se apuntó en el Capítulo 2, la simulación de Monte Carlo constituye la aproximación preponderante para la estimación de las métricas de riesgo. La generación de un valor de pérdida bajo este procedimiento requiere, en el caso del modelo de pérdida definido en (2.6), (i) la realización del riesgo sistémico, recogido en la distribución F , y (ii) condicionado a éste, la del riesgo específico, dado por las M variables $Ber^i(F)e^i$, $i = 1, \dots, M$. Este proceso resulta costoso dado el elevado número de posiciones sujetas a riesgo de incumplimiento con las que suele contar una entidad, sobre todo en el caso habitual de una simulación a nivel cartera. Puesto que la caracterización de la distribución de pérdidas exige la simulación de muchos valores de pérdida, es decir, cuantiosas repeticiones de los dos pasos anteriores, la complejidad total del cálculo de las métricas de riesgo alcanza una magnitud elevada. Ello dificulta el uso del modelo de pérdida en la gestión del riesgo de la entidad, puesto que muchas de sus aplicaciones se ven limitadas por un tiempo de respuesta en el proceso de cálculo demasiado prolongado.

Por esta razón, resulta conveniente plantear esquemas de simulación eficiente que permitan caracterizar la distribución de pérdidas y el cálculo de las métricas de riesgo a un coste computacional menor. Este problema puede abordarse a través de los dos pasos que constituyen el proceso de simulación: la generación del riesgo sistémico y del específico. Las técnicas vinculadas al segundo se presentan brevemente en el Apéndice A, mientras que el tratamiento del primero en términos de Π es el objetivo de este capítulo. Por ello, en lo que sigue se asume el modelo de pérdida presentado en la ecuación (2.6) bajo el marco de infinita granularidad expuesto en el apartado 4.3. Es decir, exposición efectiva total de cada unidad de riesgo normalizada a la unidad, de manera que $L = \sum_{i=1}^M Ber^i(F) e^i \equiv F$, por ser $\sum_{i=1}^M e^i = 1$ y $M \rightarrow \infty$. De esta forma, la media, μ , y VaR, η , de L son los de F y el objetivo es entonces definir un esquema de simulación eficiente de F con el que estimar η , $P(F > \eta) = \alpha$.

Para alcanzar este objetivo son de utilidad las dos observaciones siguientes.

Primera, el percentil es una función de los datos poco tratable analíticamente, lo que ha conducido, como muestra [77], a formular el problema de la simulación eficiente de η a partir del problema inverso consistente en simular eficientemente α^0 , con:

$$\alpha^0 = P(F > \eta^0) \quad (6.1)$$

donde η^0 es una aproximación inicial a η calculada previamente. η^0 puede obtenerse con un número reducido de simulaciones o a partir de alguna solución heurística poco costosa computacionalmente.

De esta forma, el procedimiento general de estimación queda definido como:

1. Obtener una aproximación inicial de η, η^0 .
2. Diseñar un método de simulación de F que estime de forma eficiente α^0 .

3. Simular F bajo dicho método y obtener una serie de G realizaciones.
4. Estimar η a partir de los G valores obtenidos en el punto anterior.

Es decir, el esquema de simulación se diseña en función de otro objetivo (la estimación de α^0 dado η^0), pero se aplica sobre el original (la estimación de η dado α). [77] muestra la consistencia del cambio cuando $\eta^0 = \eta$, de forma que éste es más eficaz cuanto más próximos están percentil y estimación inicial. En cualquier caso, puesto que el objetivo de este procedimiento es diseñar el método de simulación y no obtener una estimación directa de η , la elección del valor inicial η^0 no es crítica.

Segunda, la estimación de α como probabilidad de que F supere el VaR es equivalente a su estimación como valor esperado de la variable $K^0(F)$, con:

$$K^0(x) = \begin{cases} 1 & x > \eta^0 \\ 0 & x \leq \eta^0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Esta representación permite (i) interpretar un problema de reducción del coste computacional como un problema de obtención de un estimador eficiente para la media de una variable aleatoria, y (ii) obtener, como muestra [75], un intervalo de confianza $1 - \xi$ para α en términos de la aproximación Normal como:

$$(\alpha^1, \alpha^2) = \left(\hat{\alpha}^0 - z_{\xi/2} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}{G}}, \hat{\alpha}^0 + z_{\xi/2} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})}{G}} \right) \quad (6.3)$$

siendo $\hat{\alpha}^0$ el estimador clásico de $\alpha^0 = E[K^0]$, $\hat{\alpha}^0 = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G K^0(x^i)$, con $\{x^1, \dots, x^G\}$ una muestra de F . De este intervalo puede derivarse uno para η , (η^1, η^2) , que resulta útil como medida de la precisión de la estimación y puede ser empleado como variable de control en un proceso de simulación iterativo (*adaptive simulation*) como el que se plantea, por ejemplo, en [19].

6.3. Esquema de simulación eficiente sobre la dimensión temporal

6.3.1. Introducción

Una aproximación razonable a la estimación eficiente del VaR de Π resulta de considerar la expresión:

$$\alpha = P(\Pi > \eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P(W_t > \eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_t \quad (6.4)$$

con $\alpha_t = P(W_t > \eta)$.

Si el nivel de cobertura, u , es muy elevado, como sucede habitualmente, es de esperar, como se observó en el apartado 5.4.2, que para muchas componentes se cumpla que $P(W_t > \eta) \approx 0$, mientras que para las restantes se tenga que $P(W_t > \eta) \gg 0$. Este comportamiento define una partición de las componentes de la ventana. Así, si se define \mathcal{T}^* como el subconjunto de las T^* componentes W_t con una probabilidad de superar el umbral η significativamente mayor que cero, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\Pi > \eta) \\ &= P(\Pi > \eta/t \in \mathcal{T}^*) \frac{T^*}{T} + P(\Pi > \eta/t \notin \mathcal{T}^*) \left(1 - \frac{T^*}{T}\right) \\ &\approx P(\Pi > \eta/t \in \mathcal{T}^*) \frac{T^*}{T} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Este resultado sugiere un procedimiento sencillo para lograr una simulación más eficiente de Π : generar valores exclusivamente de aquellas componentes W_t para las que se cumple que $P(W_t > \eta) \gg 0$. Prescindir de parte de las distribuciones W_t supone un cambio en la medida de la distribución multinomial \mathcal{I} : desde una distribución uniforme, donde todos los pesos son iguales a $1/T$, a una distribución asimétrica, donde parte de las componentes, $T - T^*$, tienen peso 0, y el resto, T^* , tienen peso $1/T^*$. Se forma así una nueva mixtura, Π^* , sobre la que se puede aplicar el procedimiento de simulación Monte Carlo estándar.

La eliminación de las componentes W_t que no pertenecen a \mathcal{T}^* requiere ajustar el nivel de cobertura. Puesto que $\alpha \frac{T}{T^*} = P(\Pi > \eta^0/t \in \mathcal{T}^*)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} u^* &= P(\Pi^* < \eta) \\ &= P(\Pi < \eta/t \in \mathcal{T}^*) \\ &= 1 - P(\Pi > \eta/t \in \mathcal{T}^*) \\ &= 1 - \alpha \frac{T}{T^*} \\ &\neq 1 - \alpha = u \end{aligned} \quad (6.6)$$

Es decir, el nivel de cobertura $u = 1 - \alpha$ de Π es equivalente al nivel $u^* = 1 - \alpha \frac{T}{T^*}$ en Π^* .

Este esquema es fácil de implementar y puede mejorar notablemente la precisión de la estimación de η si \mathcal{T}^* está formado por un número reducido de componentes W_t , puesto que (i) el número de simulaciones por componente aumenta, y (ii) el nivel de cobertura disminuye.

No obstante, esta aproximación (i) requiere de un procedimiento para identificar el subconjunto de componentes \mathcal{T}^* , (ii) puede generar un sesgo en la estimación de η si se eliminan distribuciones condicionales W_t que sí generan valores próximos a η , y (iii) el

cambio de medida que se induce sobre \mathcal{I} es notablemente rígido: o bien la distribución condicional pasa a tener peso 0, o bien conserva la uniformidad relativa.

Las debilidades anteriores se pueden corregir (i) permitiendo un rango de variación más amplio para los pesos de las componentes W_t , y (ii) derivando para ellos una expresión analítica bajo la cual el estimador de η , $\hat{\eta}$, sea insesgado y de mínima varianza. Es decir, asignando a cada distribución condicional W_t un peso óptimo v_t^* , con $0 \leq v_t^* \leq 1$ y $\sum_{t=1}^T v_t^* = 1$, de forma que Π^* se genere como una mixtura de las componentes W_t con vector de pesos $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_T^*)$. La metodología de simulación alternativa supone entonces simular Π^* , en vez de Π , según el procedimiento estándar.

Este procedimiento (i) generaliza la aproximación dada en (6.5) y, de hecho, la propia mixtura uniforme, que coincide con Π^* cuando $v_t^* = 1/T$, (ii) implica que la eliminación de componentes W_t se da como consecuencia de que su peso v_t^* es 0, o suficientemente próximo a 0, y no bajo una decisión subjetiva, y (iii) requiere corregir el sesgo en la estimación de η que induce la consideración de un vector de pesos, \mathbf{v}^* , distinto del original, $(1/T, \dots, 1/T)$.

6.3.2. Esquema de simulación propuesto

Implementar la metodología de simulación alternativa esbozada al final del apartado 6.3.1 requiere (i) una metodología de cálculo de los pesos v_t^* , y (ii) una metodología que corrija el sesgo que se produce al alterar los pesos uniformes.

El esquema de simulación propuesto aborda ambos puntos desde la perspectiva del *Importance Sampling* (IS), una técnica general de reducción de la varianza consistente en emplear en la simulación de una variable aleatoria una densidad muestral diferente de la poblacional. La densidad muestral se escoge entonces con el fin de aumentar la eficiencia del estimador, que debe ser corregido para eliminar el sesgo que aparece al disociar densidad muestral y poblacional.

En [75] y, de forma más breve, en el Apéndice C, se revisan los fundamentos estadísticos del IS, que en el caso de una variable aleatoria multinomial X que toma los valores $\{x_1, \dots, x_T\}$ según una medida de probabilidad $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_T)$ supone definir (i) una medida alternativa, $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_T^*)$, y (ii) un vector de *factores*, o *coeficientes*, de *corrección* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_T)$, con $\delta_t = v_t/v_t^*$, que corrige la ponderación, distinta de la original, que induce \mathbf{v}^* en la muestra simulada y que puede sesgar la estimación. Los factores de corrección se aplican sobre el estimador de interés, habitualmente la media de la variable aleatoria, de forma que se sustituye la media simple de los valores realizados por una media ponderada por los factores de corrección³.

En resumen, el algoritmo de simulación eficiente propuesto actúa sobre la dimensión temporal de Π y se fundamenta en aplicar un esquema IS a la variable multinomial \mathcal{I} , que, junto con las componentes W_t , define Π . Ello significa alterar los pesos de cada componente de la mixtura, desde $v_t = 1/T$ a una nueva formulación no uniforme dada

³ δ_t , $t = 1, \dots, T$, es el factor de corrección asociado a la realización x^i de X , $i = 1, \dots, G$, si $x^i = x_t$.

por $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_T^*)$, cuya expresión óptima se establece en la Proposición 6.1.

Proposición 6.1. *El vector de pesos IS $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_T^*)$ que minimiza la varianza del estimador clásico de $\alpha^0 = E[K^0(\Pi)]$, $\hat{\alpha}^0 = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G K^0(\pi^i)$, con $\{\pi^1, \dots, \pi^G\}$ una muestra de tamaño G de Π , es el dado por:*

$$v_t^* = \frac{\sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}} \quad (6.7)$$

con vector de factores de corrección, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_T)$, dado por:

$$\delta_t = \frac{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}} \quad (6.8)$$

siendo $\hat{\alpha}_t^0$ el estimador clásico de $\alpha_t^0 = E[K^0(W_t)]$, $\hat{\alpha}_t^0 = \frac{1}{G_t} \sum_{i=1}^{G_t} K^0(w_t^i)$, y $\{w_t^1, \dots, w_t^{G_t}\}$ una muestra de tamaño G_t de W_t .

Demostración.

La muestra $\{w_t^1, \dots, w_t^{G_t}\}$ de W_t puede formularse como la submuestra $\{\pi_t^1, \dots, \pi_t^{G_t}\}$ de tamaño G_t de $\{\pi^1, \dots, \pi^G\}$ generada por la componente W_t . Puesto que:

$$\alpha^0 = E[K^0(\Pi)] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[K^0(W_t)] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \alpha_t^0 \quad (6.9)$$

con $\alpha_t^0 = E[K^0(W_t)]$, se cumple que:

$$\hat{\alpha}^0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\alpha}_t^0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{G_t} \sum_{i=1}^{G_t} K^0(\pi_t^i) \quad (6.10)$$

Dado G , el interés radica en determinar $\{G_1, \dots, G_T\}$, con $G = \sum_{t=1}^T G_t$, de forma que la varianza de $\hat{\alpha}^0$ sea mínima. Ello conduce de forma inmediata al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \underset{\{G_1, \dots, G_T\}}{\text{Min}} \quad & V[\hat{\alpha}^0] = V\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\alpha}_t^0\right] = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T V[\hat{\alpha}_t^0] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=1}^T G_t = G \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para resolver este problema basta notar que:

$$V[\hat{\alpha}_t^0] = \frac{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}{G_t} \quad (6.12)$$

y que por tanto:

$$\frac{\partial V[\hat{\alpha}^0]}{\partial G_t} = \frac{-\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}{G_t^2} \quad (6.13)$$

de forma que las condiciones de primer orden son:

$$\frac{-\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}{G_t^2} = \lambda, \quad t = 1, \dots, T \quad (6.14)$$

siendo λ el multiplicador de Lagrange. Ello implica que el número óptimo de simulaciones a nivel condicional, G_t^* , debe ser proporcional a $\sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}$, que es la desviación típica estimada de $K^0(W_t)$. Es decir:

$$G_t^* = \frac{\sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}} G \quad (6.15)$$

Por su condición de mixtura, lo anterior puede interpretarse como un esquema IS para Π que modifica la uniformidad de la variable \mathcal{I} según los pesos:

$$v_t^* = \frac{\sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}} = \frac{S[K_t^0]}{\sum_{t=1}^T S[K_t^0]} \quad (6.16)$$

siendo $S[K_t^0]$ la desviación típica de $K_t^0 = K^0(W_t)$.

Puesto que Π es una mixtura uniforme, $v_t = 1/T$, el factor de corrección viene dado por:

$$\delta_t = \frac{\frac{1}{T}}{\frac{\sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}} = \frac{\sum_{t=1}^T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}}{T \sqrt{\hat{\alpha}_t^0 (1 - \hat{\alpha}_t^0)}} = \frac{\sum_{t=1}^T S[K_t^0]}{T S[K_t^0]} \quad (6.17)$$

■

De esta forma, el algoritmo de simulación eficiente propuesto es el siguiente⁴:

1. Simular G^0 valores de Π y estimar el valor inicial η^0 . En la práctica, puede optarse por simular G^0/T valores provenientes de cada componente W_t .
2. Para cada periodo, estimar el peso v_t^* , $v_t^* = \frac{S[K_t^0]}{\sum_{t=1}^T S[K_t^0]}$, aprovechando en su caso las simulaciones obtenidas en el periodo anterior.

⁴ En el que se considera, por simplicidad, simulación Monte Carlo para la estimación inicial (paso 1), pudiéndose emplear cualquier otro método.

3. Simular G valores de la distribución Π^* obtenida como mixtura de las componentes W_t con pesos v_t^* .
4. Estimar η a partir del conjunto de G valores simulados según Π^* , corrigiendo la estimación del percentil por medio de los coeficientes de corrección δ_t .

El punto 4 requiere ponderar, en el estimador percentil, los G valores simulados según los coeficientes de corrección δ_t . Ello supone, como muestra [75], tomar como percentil aquél valor simulado para el que se cumple que la suma de los coeficientes de corrección asociados a los valores simulados menores o iguales que él es igual a $u = 1 - \alpha$. Es decir:

1. Ordenar los G valores simulados de menor a mayor: $\pi^{[1]}, \dots, \pi^{[G]}$.
2. Asignar a cada valor $\pi^{[i]}$ su factor de corrección⁵ δ^i .
3. Normalizar a la unidad los factores de corrección, es decir, asignar a cada valor simulado $\pi^{[i]}$ el coeficiente $\hat{\delta}^i = \frac{\delta^i}{\sum_{i=1}^G \delta^i}$.
4. Para cada valor $\pi^{[i]}$, obtener el valor $\bar{\delta}^i = \sum_{l=1}^i \hat{\delta}^l$.
5. Tomar como estimador de η el valor simulado $\pi^{[i]}$ cuyo coeficiente $\bar{\delta}^i$ esté más cercano a $u = 1 - \alpha$. Emplear, en su caso, interpolación entre valores simulados sucesivos.

La Figura 6.1 ejemplifica el cálculo de η a través de los factores de corrección.

6.3.3. Discusión

El esquema de simulación propuesto es (i) riguroso, puesto que los pesos se derivan formalmente y, en particular, la eliminación de componentes se produce como consecuencia de obtener un peso igual, o cercano, a 0 y no tras un proceso subjetivo o heurístico de eliminación, (ii) sencillo, tanto en la estimación de los pesos, que puede lograrse de forma inmediata en una simulación inicial, como en su implementación, puesto que sólo implica modificar los pesos de la mixtura, y (iii) intuitivo, lo que facilita su adopción por parte de una entidad financiera.

En relación con los esquemas IS previamente considerados en otros trabajos, el método propuesto supone una aportación en dos aspectos.

⁵ En lo que sigue, δ_t hace referencia al factor de corrección de la componente t -ésima, mientras que δ^i hace referencia al factor de corrección asociado a la realización i -ésima en la simulación de Monte Carlo.

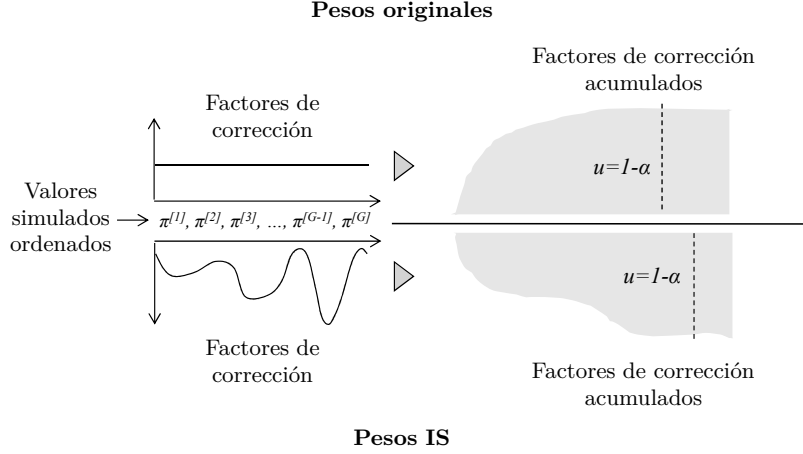


Figura 6.1: *Los factores de corrección en la simulación estándar son constantes, mientras que en el esquema propuesto pueden ser distintos, por lo que se requiere de un número distinto de realizaciones ordenadas para que la suma acumulada alcance el nivel de cobertura.*

Por un lado, en el procedimiento de aplicación. A diferencia de los trabajos citados previamente, la técnica no se aplica directamente sobre la distribución⁶ F , ni se recurre a una función de muestreo compleja, costosa de calibrar o implementar⁷. Por el contrario, se aprovecha el carácter estructural de Π , su condición de mixtura de las distribuciones condicionales, para actuar sobre la distribución multinomial \mathcal{I} , de forma que un problema de ámbito continuo se reduce así al caso discreto, lo que facilita el tratamiento analítico.

Por otro lado, en lo que respecta a su versatilidad. Los pesos v_t^* admiten una interpretación económica evidente y útil, lo que distingue al algoritmo propuesto de las aproximaciones existentes, que no ofrecen otro uso fuera del ámbito de la simulación eficiente. Como ejemplo de aplicación destaca el stress test, puesto que los pesos v_t^* pueden servir como medida relativa (a la ventana de cálculo) de la severidad del escenario económico vinculado al periodo.

En lo que respecta a su implementación, cabe destacar tres aspectos.

Primero, es probable que parte de las componentes obtengan pesos v_t^* muy próximos a cero en la simulación inicial, lo que hace conveniente, a efectos numéricos, definir un umbral por debajo del cual dichos pesos se fijen a 0. En el caso de que algunas componentes tengan peso nulo, el nivel de cobertura debe ser corregido⁸ según lo expuesto en el apartado 6.3.1.

Segundo, en caso de que se desee estimar la media de Π , μ , a través de la simulación, resulta necesario fijar un número mínimo de simulaciones por periodo para evitar una

⁶ Por ejemplo, en el caso de la distribución de Vasicek, sobre el factor z con distribución $N(0, 1)$.

⁷ Funciones de muestreo como el *exponential twisting* (cambio de medida exponencial) o el *mean shifting* (traslación de la media de la distribución), tratadas en [75].

⁸ Corrección adicional a la que se aplica a través de los coeficientes de corrección $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_T)$.

estimación sesgada. En tal caso, el estimador, $\hat{\mu}$, viene dado por⁹ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G \pi^{[i]} \hat{\delta}^i \quad (6.18)$$

Tercero, en la práctica el algoritmo propuesto para Π puede quedar incluido en un proceso de simulación más general que abarque tanto riesgo sistémico como específico. En el caso del modelo de pérdida dado por la ecuación (2.6), la integración del esquema propuesto resulta inmediata:

1. Simular G valores de Π , $\{\pi^1, \dots, \pi^G\}$, según el algoritmo propuesto y almacenarlos junto con sus factores de corrección, $\{\hat{\delta}^1, \dots, \hat{\delta}^G\}$.
2. Para cada valor generado π^i , $i = 1, \dots, G$, generar una realización de $L^{\pi^i} = L/[\Pi = \pi^i] = \sum_{i=1}^M Ber^i(\pi^i) e^i$, denotada por l^i .
3. Asignar a cada valor de pérdida l^i el factor de corrección $\hat{\delta}^i$.
4. Estimar el percentil de interés de la muestra $\{l^1, \dots, l^G\}$, aplicando en su cálculo los factores de corrección $\{\hat{\delta}^1, \dots, \hat{\delta}^G\}$ según el procedimiento expuesto en el apartado 6.3.2.

Es decir, cada valor de pérdida l^i hereda el factor de corrección asociado a su PD, π^i . También en este caso la eliminación de periodos de la ventana de cálculo requiere ajustar a la baja el nivel de cobertura.

Por último, cabe destacar que, como sucede en otras ocasiones a lo largo de este trabajo, es el carácter estructural de Π y la consideración de las distribuciones condicionales W_t los que han permitido formular la aportación. Una aproximación estática impide, obviamente, definir un esquema IS en los términos aquí planteados.

6.3.4. Análisis empírico

La Figura 6.2 compara, estandarizadas y para cada unidad de riesgo, la serie de HR con la serie de pesos v_t^* , considerando como ventana de cálculo la completa, como nivel de cobertura los valores 99,9 y 99,97 y como dinámica subyacente la dada por los modelos ARIMA presentados en el apartado 4.2.2.1. Como valor inicial η^0 se ha tomado el obtenido en el apartado 4.5.2.

⁹ Este estimador no es, sin embargo, óptimo para la estimación de $E[\Pi]$, puesto que se trata de una media ponderada en vez de simple. Por ello, puede resultar conveniente plantear una simulación propia con la que estimar μ . En todo caso, bajo el modelo de pérdida presentado en (2.6) la pérdida esperada puede determinarse analíticamente.

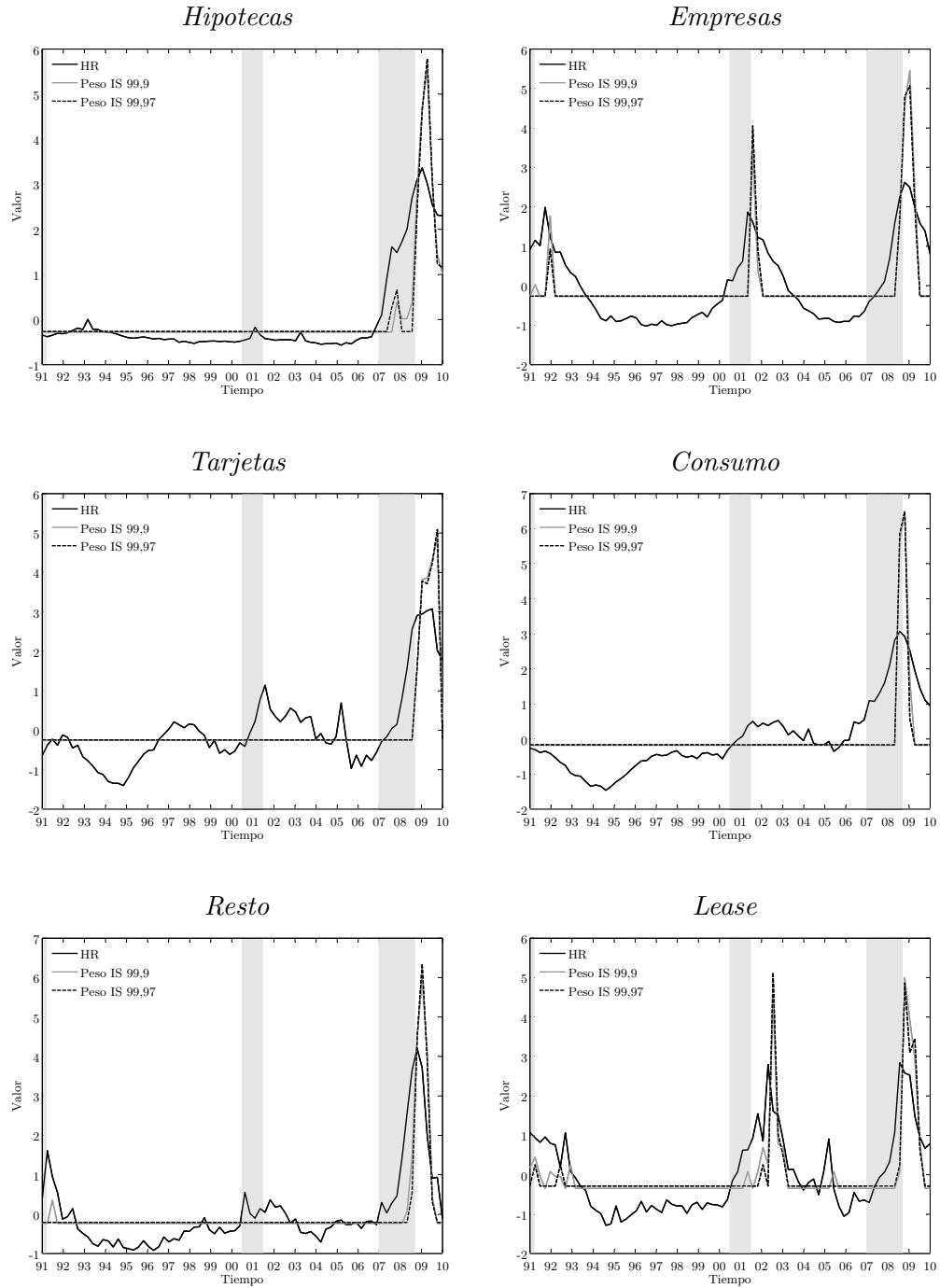


Figura 6.2: Series de HR y pesos del esquema de simulación IS en la dimensión temporal a horizonte anual al 99,9 y 99,97. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

Los resultados obtenidos son coherentes: la serie de pesos del esquema IS y la de HR presentan un comportamiento similar, mostrando que sólo aquéllos periodos con mayores HR son los involucrados en la determinación de η cuando el nivel de cobertura es tan elevado. El resto de periodos, que suponen la gran mayoría de la ventana, tienen un valor constante igual a 0, lo que significa que la desviación típica de la variable indicador $K_t^0 = K^0(W_t)$ es cero¹⁰. Este efecto es más acentuado, como es de esperar, en el nivel de cobertura 99,97, en el que sólo uno o dos periodos tienen un peso v_t^* positivo en la mayoría de las unidades.

6.3.5. Comparación con la simulación de Monte Carlo estándar

Como es habitual en la literatura¹¹, se ha realizado un ejercicio empírico que compara la simulación Monte Carlo estándar y la simulación Monte Carlo bajo el esquema IS propuesto en el apartado 6.3.2. El objetivo es comprobar la ganancia en términos de precisión/coste computacional del segundo. En la comparación se han generado, por cada uno de los dos métodos, 50 muestras de 100.000 valores. Para cada muestra se han estimado los percentiles $\eta_{99,9}$ y $\eta_{99,97}$. La Tabla 6.1 muestra la media de los 50 valores estimados bajo cada esquema así como el cociente de sus respectivas desviaciones típicas.

Unidad	$\hat{\eta}_{99,9}$			$\hat{\eta}_{99,97}$		
	$\hat{\eta}^{\text{IS}}$	$\hat{\eta}^{\text{BASE}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}/\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$	$\hat{\eta}^{\text{IS}}$	$\hat{\eta}^{\text{BASE}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}/\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$
Hipotecas	0,0429	0,0427	0,2065	0,0484	0,0481	0,3524
Empresas	0,0537	0,0539	0,2493	0,0590	0,0588	0,2172
Tarjetas	0,1332	0,1332	0,3597	0,1396	0,1396	0,1575
Consumo	0,0475	0,0474	0,1605	0,0497	0,0497	0,1685
Resto	0,0542	0,0541	0,1930	0,0626	0,0631	0,1420
Lease	0,0303	0,0302	0,3245	0,0342	0,0343	0,2572

Tabla 6.1: Comparación a horizonte anual y para los niveles de cobertura 99,9 y al 99,97 del esquema de simulación propuesto sobre la dimensión temporal con el esquema de simulación estándar. Se han generado 50 lanzamientos de cada uno. $\hat{\eta}^{\text{IS}}$, media de las 50 estimaciones de η según el esquema propuesto. $\hat{\eta}^{\text{BASE}}$, media de las 50 estimaciones de η según el esquema estándar. $\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}$, desviación típica de las 50 estimaciones de η según el esquema propuesto. $\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$, desviación típica de las 50 estimaciones de η según el esquema estándar.

Los resultados muestran una disminución notable de la desviación típica del estimador de η , $\hat{\eta}$, con el empleo del método propuesto en todos los casos, y de forma más notoria para el nivel de cobertura 99,97. Así, la desviación típica se reduce, en media, en un 75 % para $\hat{\eta}_{99,9}$ y en un 78 % para $\hat{\eta}_{99,97}$. Ello equivale a un aumento de la precisión del estimador basado en el esquema IS, puesto que el número de simulaciones, 100.000, se mantiene fijo. En lo que respecta a las ligeras diferencias apreciadas en la

¹⁰ Es decir, en la simulación inicial todos los valores generados de la componente W_t quedaron por encima o, preferentemente en este caso, por debajo de η^0 .

¹¹ [79], [125] y [19], entre otros, presentan ejercicios similares.

media de las estimaciones, éstas son consistentes con el error de realización asociado a toda simulación Monte Carlo.

En resumen, la comparativa evidencia de forma clara la efectividad del algoritmo propuesto: reduce considerablemente la variabilidad del estimador sin incurrir en un sesgo con respecto a la estimación proveniente de la mixtura uniforme.

6.3.6. Aplicación a nivel cartera

La aplicación a nivel cartera del esquema de simulación eficiente propuesto en el apartado 6.3.2 es inmediata y se reduce a definir el esquema sobre la distribución agregada. La estimación de los pesos y el uso de los factores de corrección es idéntica a la presentada para el caso univariante, siendo en este caso α y η los asociados a la distribución agregada, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\eta}$, con $\tilde{\mathbf{v}}^* = (\tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_T^*)$ y $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_T)$ los pesos y factores de corrección del esquema propuesto para la distribución agregada.

La Figura 6.3 compara, estandarizadas, las seis series de HR norteamericanas con la serie de pesos \tilde{v}_t^* para la distribución agregada $\tilde{\Pi} = \sum_{j=1}^N \Pi^j$, correspondiente a la distribución de pérdidas agregada bajo la cartera ficticia definida en el apartado 4.3. Como valor inicial η^0 se ha tomado el obtenido en el apartado 4.5.2. Se observa un comportamiento consistente con el obtenido a nivel univariante: una estrecha relación entre las series de HR y los pesos IS en la dimensión temporal, en este caso para la distribución agregada.

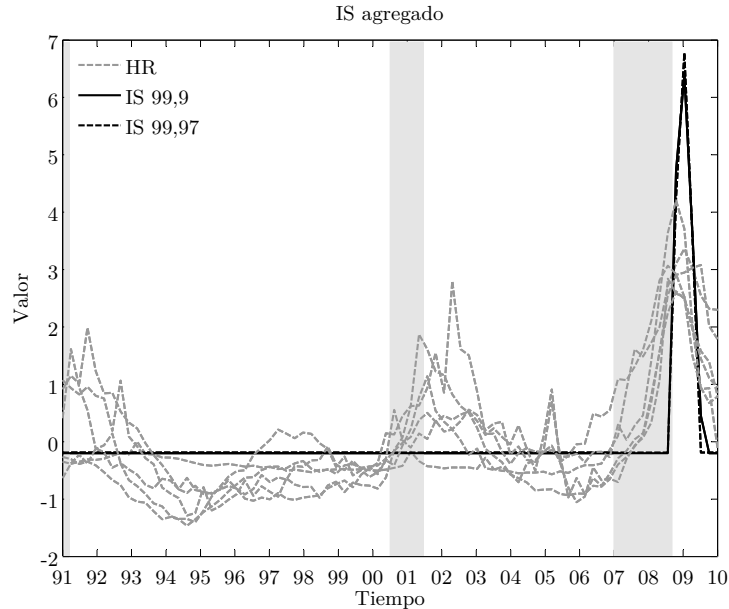


Figura 6.3: Series de HR de todas las unidades de la cartera y pesos del esquema IS en la dimensión temporal a horizonte anual para la distribución agregada al 99,9 y 99,97. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

Cabe señalar que, en general, el vector de pesos IS a nivel agregado no coincidirá con los vectores de pesos IS correspondientes a cada unidad de riesgo. Ello se debe a que obedecen a procesos de optimización distintos y sugiere considerar $N + 1$ esquemas IS a emplear en función del tipo de simulación a acometer: agregada o individual y en éste último caso, en función de la unidad de riesgo. En todo caso, en la medida en que las series de HR de las unidades que forman la cartera presenten un comportamiento similar, los pesos IS individuales serán semejantes entre unidades y, en consecuencia, semejantes a los pesos IS a nivel agregado. Este es, de hecho, el caso de las unidades de riesgo norteamericanas.

6.4. Esquema de simulación eficiente extendido

6.4.1. Introducción

El esquema propuesto en el apartado 6.3.2 aprovecha la dimensión temporal de Π para alcanzar una reducción significativa del coste computacional frente al método de simulación estándar. No obstante, dado un periodo temporal t , la simulación de un valor de W_t es idéntica en ambos esquemas. Ello sugiere una vía adicional sobre la que actuar para mejorar la eficiencia de la simulación: las propias componentes W_t .

En este apartado se presenta una extensión del método de simulación propuesto en 6.3.2 al espacio de innovaciones de la dinámica subyacente, es decir, al espacio de las fuentes de incertidumbre que excitan la dinámica de x_t y que determinan las distribuciones condicionales $X_{s/t}$, $t = 1, \dots, T$ y $s = 1, \dots, Q$.

Como en el caso temporal, el objetivo es obtener un método objetivo, sencillo e intuitivo. Para ello, es conveniente asumir, sin pérdida de generalidad¹², que el número de innovaciones necesarias para obtener una senda de longitud Q del proceso x_t es Q . En lo que sigue, se asume también que las innovaciones $A_{t,s}$, $t = 1, \dots, T$ y $s = 1, \dots, Q$ son independientes e idénticamente distribuidas (IID), tienen función de distribución ψ y soporte¹³ en \mathbb{R} , con $E[A_{t,s}] = 0$.

De esta forma, fijado el horizonte de cálculo, Q , es posible formular la variable aleatoria W_t como función de Q innovaciones $A_{t,s}$:

$$W_t = W_t(A_{t,1}, \dots, A_{t,Q}) \quad (6.19)$$

La relación entre W_t y el vector de innovaciones $\mathbf{A}_t = (A_{t,1}, \dots, A_{t,Q})$, se produce a través de las distribuciones condicionales futuras, es decir:

$$W_t = W_t(X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) \quad (6.20)$$

¹² El desarrollo puede extenderse de forma inmediata a un número de innovaciones arbitrario.

¹³ El desarrollo puede extenderse a cualquier abierto A , $A \subset \mathbb{R}$.

con $X_{s/t} = X_{s/t}(A_{t,1}, \dots, A_{t,s})$, por lo que la innovación s -ésima, $A_{t,s}$, afecta a W_t a través de $Q - s + 1$ distribuciones condicionales $X_{s/t}$.

Dado que la fuente primitiva de incertidumbre de W_t es el vector de innovaciones \mathbf{A}_t , resulta razonable sustentar la simulación eficiente de W_t en él.

6.4.2. Esquema de simulación propuesto

El cambio de medida sobre \mathcal{I} que da lugar al esquema de simulación eficiente en la dimensión temporal propuesto anteriormente puede extenderse al vector de innovaciones \mathbf{A}_t , $t = 1, \dots, T$, según los siguientes puntos:

1. Definir una partición finita de \mathbb{R}^Q , \mathcal{P}_t , formada por N_t elementos P_t^b , $b = 1, \dots, N_t$, con $P_t^b \cap P_t^k = \emptyset$ y $\bigcup_{b=1}^{N_t} P_t^b = \mathbb{R}^Q$.
2. Calcular el peso de cada elemento de la partición, p_t^b , como $p_t^b = P(\mathbf{A}_t \in P_t^b)$, con $\sum_{b=1}^{N_t} p_t^b = 1$.
3. Definir la variable multinomial \mathcal{B}_t como aquélla que toma el valor b , $b = 1, \dots, N_t$, con probabilidad p_t^b .

Esta estructura permite plantear la simulación de un valor de W_t bajo el siguiente procedimiento:

1. Simular un valor de \mathcal{B}_t , b .
2. Simular un valor de $\mathbf{A}_t^b = \mathbf{A}_t / [\mathbf{A}_t \in P_t^b]$, $\mathbf{a}_t^b = (a_{t,1}^b, \dots, a_{t,Q}^b)$.
3. Aplicar \mathbf{a}_t^b sobre la dinámica subyacente de Π para obtener un valor de W_t^b , w_t^b , con $W_t^b = W_t / [\mathbf{A}_t \in P_t^b]$.
4. Tomar w_t^b como un valor realizado de W_t .

El producto de \mathcal{I} , la variable multinomial que toma el valor t , $t = 1, \dots, T$, con probabilidad $1/T$, y la colección de variables multinomiales \mathcal{B}_t , que toman el valor b , $b = 1, \dots, N_t$, con probabilidad p_t^b , permite definir la variable multinomial \mathcal{H} como aquélla que toma el par (t, b) con probabilidad p_t^b/T . A partir de \mathcal{H} es posible considerar el siguiente esquema de simulación de Π :

1. Simular un valor de \mathcal{H} , (t, b) .
2. Simular un valor de $\mathbf{A}_t^b = \mathbf{A}_t / [\mathbf{A}_t \in P_t^b]$, \mathbf{a}_t^b .
3. Aplicar \mathbf{a}_t^b sobre la dinámica subyacente para obtener un valor de W_t^b , w_t^b .

4. Tomar w_t^b como un valor realizado de W_t y por ello de Π .

Este procedimiento (i) se asemeja a la simulación por hipercubos latinos¹⁴ (*latin hypercubes*, [75]), (ii) supone interpretar Π como una mixtura de las $\sum_{t=1}^T N_t$ componentes W_t^b con pesos p_t^b/T , y (iii) permite plantear un esquema de simulación eficiente sobre el producto de los dos espacios, temporal y de innovaciones, que extiende el propuesto exclusivamente sobre la dimensión temporal en 6.3.2.

Los pasos del esquema extendido son los siguientes:

1. Simular G^0 valores de Π y estimar el valor inicial η^0 . En la práctica puede optarse por simular $\frac{G^0 p_t^b}{T}$ valores de cada componente W_t^b .
2. Para cada componente W_t^b , estimar el peso v_t^{b*} , $v_t^{b*} = \frac{S[K_t^{b,0}]}{\sum_{t=1}^T \sum_{b=1}^{N_t} S[K_t^{b,0}]}$, aprovechando en su caso las simulaciones obtenidas en el periodo anterior.
3. Simular G valores de la distribución Π^* , obtenida como mixtura de las componentes W_t^b con pesos v_t^{b*} .
4. Estimar η a partir del conjunto valores simulados anterior, corrigiendo la estimación del percentil por medio de los coeficientes de corrección δ_t^b , según lo establecido en el apartado 6.3.2.

siendo $K_t^{b,0}$ la dada por:

$$K_t^{b,0} = K^0(W_t^b) = \begin{cases} 1 & W_t^b > \eta^0 \\ 0 & W_t^b \leq \eta^0 \end{cases} \quad (6.21)$$

6.4.3. Discusión

El esquema de simulación eficiente extendido supone la principal aportación del capítulo, ya que (i) aprovecha las dos fuentes de incertidumbre del modelo propuesto y su composición como simulación histórica y estocástica, (ii) por lo anterior, supone un planteamiento pionero respecto a los desarrollos precedentes, (iii) conserva las buenas propiedades del esquema definido en el apartado 6.3.2, es decir, es riguroso, sencillo e intuitivo, (iv) proporciona, a través de los pesos v_t^{b*} , abundante información sobre el

¹⁴ Puesto que, fijado t , $t = 1, \dots, T$, conlleva (i) la definición de una partición, \mathcal{P}_t , del soporte de \mathbf{A}_t , \mathbb{R}^Q , y (ii) la simulación de W_t en dos etapas: primero se genera un elemento de la partición y después un valor de W_t condicionada a dicho elemento. La semejanza no es total ya que (i) la partición no se efectúa sobre el soporte de W_t , sino sobre el de su fuente de incertidumbre primitiva, el vector de innovaciones \mathbf{A}_t , y (ii) la definición de la partición es un medio, no un fin, dentro del procedimiento de simulación eficiente extendido propuesto.

riesgo de incumplimiento de la unidad a lo largo de la ventana, y (v) obtiene, como se muestra posteriormente, un incremento significativo en la eficiencia de $\hat{\eta}$.

Su implementación requiere determinar las particiones \mathcal{P}_t , $t = 1, \dots, T$. Aunque no existen restricciones a su diseño, se propone el empleo de una especificación invariante, ortogonal y equiprobable.

Invariante significa que $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}$ para todo t , lo que facilita la comparación de los pesos entre periodos y es consistente con el hecho de que las innovaciones $A_{t,s}$ son IID para $t = 1, \dots, T$ y $s = 1, \dots, Q$.

Ortogonal implica que la división del espacio de innovaciones, \mathbb{R}^Q , se efectúa a partir del espacio de cada innovación, \mathbb{R} , de manera que \mathcal{P} se obtiene como el producto cartesiano de las particiones marginales. Para facilitar la simulación y evitar un número excesivo de elementos en \mathcal{P} , se propone la partición del espacio de cada innovación en dos regiones, $R^0(c_s)$ y $R^1(c_s)$, según el valor $c_s \in \mathbb{R}$, $s = 1, \dots, Q$, siendo:

$$R^0(c_s) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq c_s\} \quad (6.22)$$

$$R^1(c_s) = \{x \in \mathbb{R} / x > c_s\} \quad (6.23)$$

De esta forma, el número de elementos de \mathcal{P} , N , es igual a 2^Q y cada uno de ellos puede identificarse con un elemento de $\{0, 1\}^Q$ y reformularse como:

$$P_{\theta_1, \dots, \theta_Q} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_Q) \in \mathbb{R}^Q / x_1 \in R^{\theta_1}, \dots, x_Q \in R^{\theta_Q}\} \quad (6.24)$$

con $\theta_s \in \{0, 1\}$, $s = 1, \dots, Q$.

La probabilidad de pertenencia a cada elemento $P_{\theta_1, \dots, \theta_Q}$ de \mathcal{P} , $p_{\theta_1, \dots, \theta_Q}$, viene dada por:

$$p_{\theta_1, \dots, \theta_Q} = P(\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_Q) \in P_{\theta_1, \dots, \theta_Q}) = \prod_{s=1}^Q p_s^{1-\theta_s} (1-p_s)^{\theta_s} \quad (6.25)$$

donde:

$$p_s = P(A_s < c_s) = \psi(c_s) \quad (6.26)$$

La Figura 6.4 muestra un ejemplo de partición ortogonal para $Q = 2$.

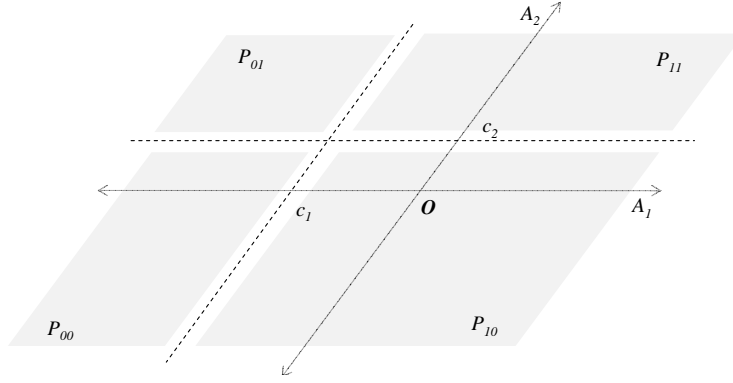


Figura 6.4: Ejemplo de partición ortogonal en el que $Q = 2$ y se han tomado $c_1 < 0$ y $c_2 > 0$. Los ejes cartesianos forman también una partición ortogonal, en este caso con $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

Cabe señalar que la elección de una partición ortogonal facilita notablemente la simulación del vector $\mathbf{A}_t^b = \mathbf{A}_t / [\mathbf{A}_t \in P^b]$, ya que ésta puede efectuarse individualmente sobre cada elemento $A_{t,s}^b$, $s = 1, \dots, Q$, aprovechando que las innovaciones son IID. La simulación de $A_{t,s}^b$ puede abordarse a partir de ψ^{-1} , la inversa de la función de distribución de las innovaciones. Así, si $P^b = P_{\theta_1, \dots, \theta_Q}$, entonces:

$$A_{t,s}^b = \psi^{-1}(U_s) \quad (6.27)$$

donde U_s es uniforme en el intervalo $(0, \psi(c_s))$ si $\theta_s = 0$, y es uniforme en el intervalo $(\psi(c_s), 1)$ si $\theta_s = 1$. La Figura 6.5 representa la modificación en la densidad original de las innovaciones que induce el esquema propuesto en el caso de partición ortogonal.

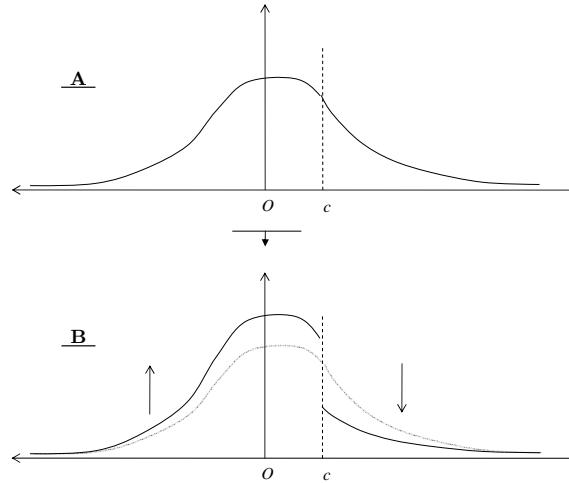


Figura 6.5: El procedimiento de simulación eficiente extendido induce, en el caso de la partición ortogonal, un reescalado de la función de densidad de las innovaciones. En el ejemplo, con un aumento de masa a la izquierda de c y una disminución a su derecha.

Equiprobable supone que $p_{\theta_1, \dots, \theta_Q} = p$ para cualesquiera $\theta_1, \dots, \theta_Q$, por lo que $p = 1/2^Q$. Así, por ejemplo, en el caso habitual de innovaciones con distribución Normal o

t-Student¹⁵, $c = c_s = 0$ para $s = 1, \dots, Q$. Esta elección está en línea con las estratificaciones empleadas en [76] y [77], quienes también consideran, por simplicidad, el caso equiprobable.

Cabe señalar que las propiedades de invarianza, ortogonalidad y equiprobabilidad otorgan a la partición del espacio de innovaciones una interpretación relevante en el caso habitual en que éstas (i) siguen una distribución simétrica respecto a la media, y (ii) la dinámica de x_t es lineal. En tal caso las innovaciones positivas pueden entenderse como “desfavorables” (puesto que arrojan un valor de HR superior al esperado) y las negativas como “favorables” (puesto que arrojan un valor de HR inferior al esperado). Puede identificarse entonces cada elemento de la partición \mathcal{P} , $P_{\theta_1, \dots, \theta_Q}$, con un posible tipo de senda condicional de longitud Q para el proceso x_t . Así, la senda que concatena Q innovaciones “desfavorables” (positivas) pertenece a la peor tipología, mientras que la formada por Q innovaciones “favorables” (negativas) se encuadra en la mejor tipología. La Figura 6.6 muestra esta interpretación, que (i) se ve reflejada en los pesos v_t^b y aumenta por ello su utilidad en otras aplicaciones, y (ii) no ha sido apuntada previamente en la literatura y supone también una contribución del esquema extendido propuesto.

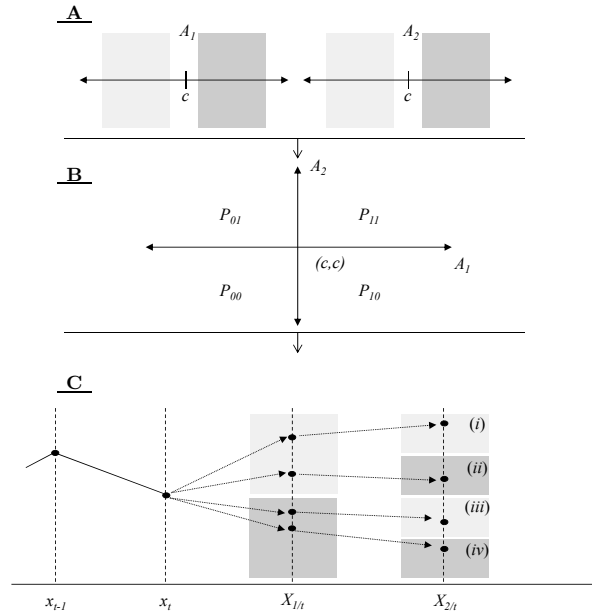


Figura 6.6: Para $Q = 2$, en (A) el dominio, \mathbb{R} , de cada innovación, A_1 y A_2 , se divide en dos regiones por medio del punto $c \in \mathbb{R}$, lo que da lugar a la partición bidimensional del espacio de innovaciones, \mathbb{R}^2 , representada en (B). Ello induce, a su vez, una partición en el espacio de sendas condicionales $X_{s/t}$, $s = 1, 2$, como se muestra en (C). En particular, las sendas (i), (ii), (iii) y (iv) se corresponden con los elementos de la partición P_{00} , P_{01} , P_{10} y P_{11} .

Por último, es relevante notar que no se han impuesto restricciones sobre la dinámica subyacente ni sobre la distribución de las innovaciones en el esquema de simulación extendido. Para éstas últimas puede considerarse, incluso, una distribución no paramétrica

¹⁵ En general, en el caso de una distribución simétrica respecto a su media se cumplirá que $c = E[A_{t,s}] = 0$.

ca. Esta flexibilidad lo distingue de las aproximaciones habituales, que se centran en su gran mayoría en las distribuciones Normal o t-Student.

6.4.4. Análisis empírico

La Figura 6.7 para el nivel de cobertura 99,9 y la Figura 6.8 para el 99,97 presentan, para horizonte anual, los pesos v_t^{b*} para las seis unidades de riesgo norteamericanas en los últimos 40 periodos de la ventana completa (2001Q1 a 2010Q4). Como dinámica subyacente se han empleado los modelos ARIMA presentados en el apartado 4.2.2.1. Estos modelos, al ser lineales con innovaciones normales, admiten la interpretación señalada en el apartado 6.4.3. Como valor inicial η^0 se ha tomado el obtenido en el apartado 4.5.2. El espacio de innovaciones es \mathbb{R}^4 y la partición \mathcal{P} tiene $2^4 = 16$ elementos, cuya relación con el índice b se presenta en la Tabla 6.2.

$A_{t,s}$	<i>Senda</i>															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A_{t,1}$	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+
$A_{t,2}$	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
$A_{t,3}$	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+
$A_{t,4}$	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+

Tabla 6.2: Relación entre las $2^4=16$ sendas condicionales a horizonte anual y las dos regiones en que se divide el soporte de cada innovación $A_{t,s}$, \mathbb{R} , tomando $c = 0$. +, innovación positiva (“desfavorable”). −, innovación negativa (“favorable”).

Se observa en ambos casos como los pesos positivos aparecen en los periodos temporales coincidentes con valores más elevados de la serie de HR. A su vez, dado un periodo, el peso es, en general, mayor en las últimas sendas, si bien el efecto no es tan marcado como en la dimensión temporal. Es decir, no sólo las peores sendas obtienen pesos positivos.

Ello puede explicarse por dos motivos. Por un lado, dado un periodo de elevado HR, las sendas condicionales menos favorables pueden arrojar un valor de pérdida demasiado alto. Es decir, fijado un periodo temporal desfavorable, en algunos casos basta con una senda condicional “media” para obtener valores de PD próximos al percentil. Por otro lado, y como se observó en el apartado 6.4.1, no todas las innovaciones tienen la misma influencia sobre W_t , puesto que $X_{s/t} = X_{s/t}(A_{t,1}, \dots, A_{t,s})$. Ello explica que los pesos positivos se concentren mayoritariamente en los 8 últimos tipos de sendas, correspondientes a una primera innovación “desfavorable”, que es la que tiene mayor influencia en el valor realizado de W_t .

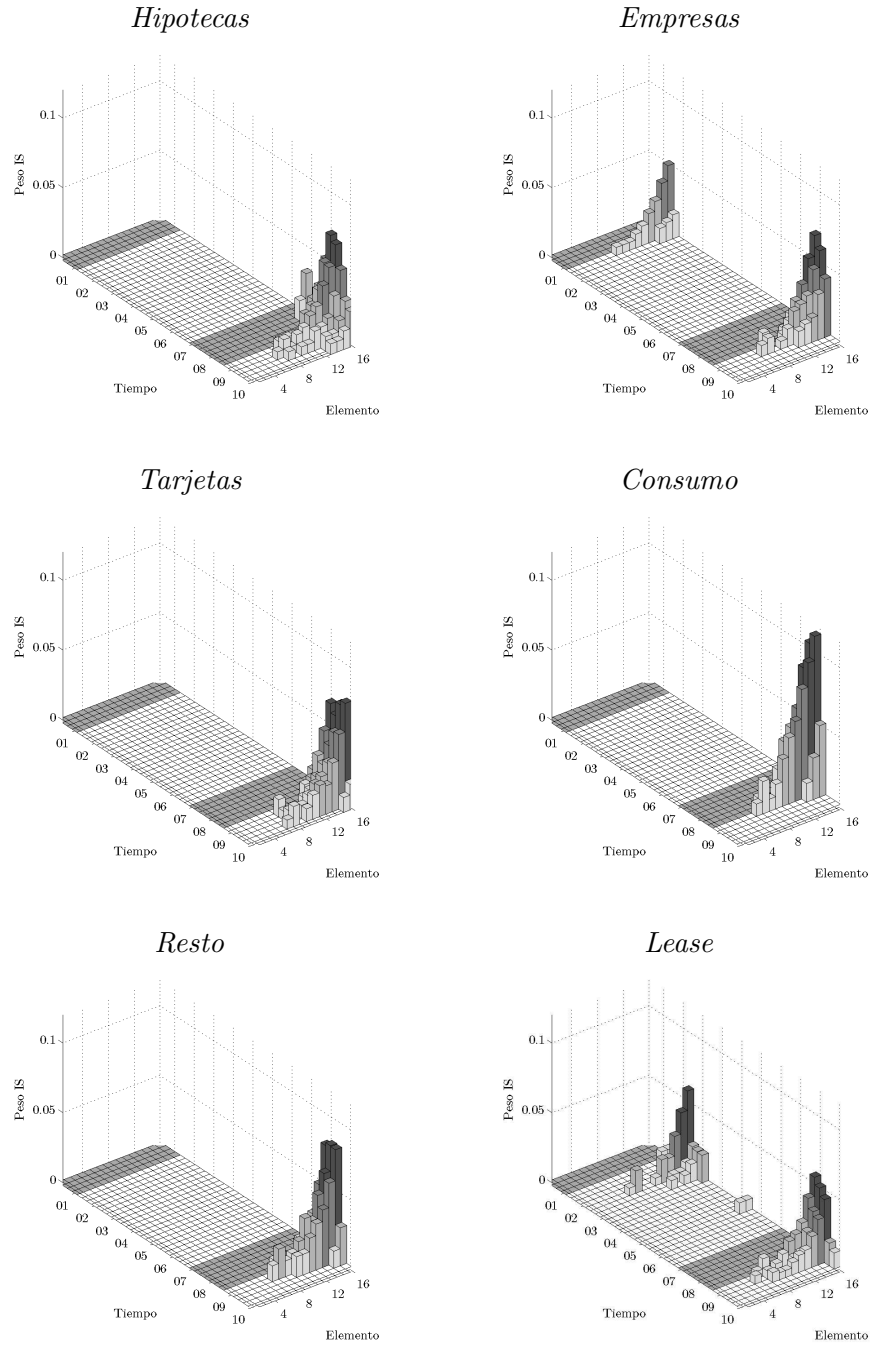


Figura 6.7: Pesos del esquema IS extendido para horizonte anual al 99,9 durante la ventana 2001Q1-2010Q4. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

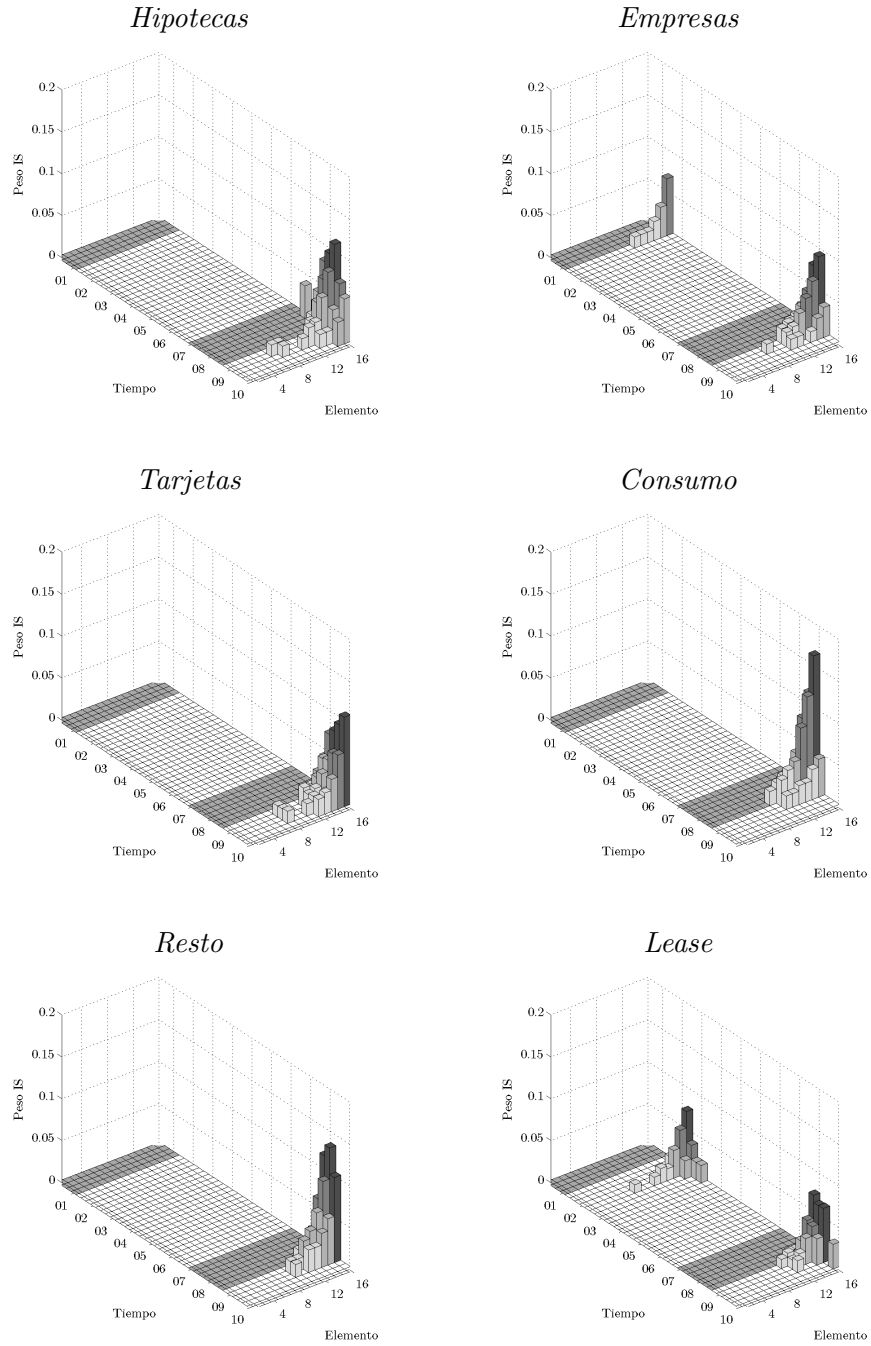


Figura 6.8: Pesos del esquema IS extendido para horizonte anual al 99,97 durante la ventana 2001Q1-2010Q4. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

6.4.5. Comparación con la simulación de Monte Carlo estándar

Con el fin de comprobar la ganancia computacional que supone adoptar el algoritmo propuesto extendido se ha llevado a cabo un ejercicio de simulación similar al presentado en el apartado 6.3.5, consistente en comparar la simulación Monte Carlo básica con el esquema IS propuesto a través de 50 repeticiones de 100.000 simulaciones cada una. Como en el citado apartado, se muestra la media de las dos muestras de 50 valores y el cociente de desviaciones típicas.

Los resultados se muestran la Tabla 6.3 y en ellos se aprecia una mejora notable respecto a la versión inicial del método y en consecuencia respecto a la simulación de Monte Carlo estándar. La disminución media de la desviación típica de los 50 valores estimados alcanza el 86 % para el nivel de cobertura 99,9 y el 88 % para el 99,97. Esta mejora corrobora tanto la efectividad del espacio de innovaciones como vía sobre la que actuar para añadir eficiencia, como la utilidad de una partición invariante, ortogonal y equiprobable para su implementación.

Unidad	$\hat{\eta}_{99,9}$			$\hat{\eta}_{99,97}$		
	$\hat{\eta}^{\text{IS}}$	$\hat{\eta}^{\text{BASE}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}/\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$	$\hat{\eta}^{\text{IS}}$	$\hat{\eta}^{\text{BASE}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}/\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$
Hipotecas	0,0427	0,0427	0,1301	0,0483	0,0486	0,1103
Empresas	0,0536	0,0537	0,0943	0,0588	0,0590	0,0957
Tarjetas	0,1330	0,1330	0,1551	0,1394	0,1397	0,1057
Consumo	0,0474	0,0475	0,1307	0,0497	0,0501	0,1758
Resto	0,0538	0,0542	0,1268	0,0622	0,0623	0,1169
Lease	0,0301	0,0301	0,1976	0,0340	0,0344	0,1394

Tabla 6.3: Comparación a horizonte anual y para los niveles de cobertura 99,9 y al 99,97 del esquema de simulación propuesto extendido con el esquema de simulación estándar. Se han generado 50 lanzamientos de cada uno. $\hat{\eta}^{\text{IS}}$, media de las 50 estimaciones de η según el esquema propuesto extendido. $\hat{\eta}^{\text{BASE}}$, media de las 50 estimaciones de η según el esquema estándar. $\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{IS}}$, desviación típica de las 50 estimaciones de η según el esquema propuesto extendido. $\hat{\sigma}_{\hat{\eta}}^{\text{BASE}}$, desviación típica de las 50 estimaciones de η según el esquema estándar.

6.4.6. Aplicación a nivel cartera

La aplicación a nivel multivariante del esquema de simulación propuesto para el espacio de innovaciones no es inmediata y requiere tener en cuenta dos puntos que pueden dificultar la implementación: (i) el espacio de innovaciones a nivel multivariante tiene¹⁶ QN dimensiones, consecuencia del horizonte de cálculo Q y de las N unidades de riesgo que conforman la cartera, y (ii) en el caso general las innovaciones contemporáneas de las distintas unidades de riesgo, $A_{t,s}$, $j = 1, \dots, N$, no serán independientes.

¹⁶ De forma similar al caso univariante, se asume por simplicidad que generar una senda condicional de longitud Q de $\mathbf{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^N)$ requiere QN innovaciones.

En lo que respecta al primer punto, el problema de dimensionalidad puede abordarse limitando el alcance del método. Para ello puede optarse por restringir la aplicación del esquema sólo a las primeras innovaciones, aquéllas que generan $\mathbf{X}_{1/t} = (X_{1/t}^1, \dots, X_{1/t}^N)$ y que son las que mayor influencia tienen sobre $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$.

De hecho, un procedimiento más general es el de reducir el número de elementos de la partición colapsando la partición ortogonal \mathcal{P} , con 2^{Q^N} elementos dados por el horizonte de cálculo Q y las N unidades de riesgo, en otra generada a partir de Q' y N' , con $Q' < Q$ y $N' < N$. Esto supone unir elementos de la partición \mathcal{P} a lo largo de las dimensiones de las que se prescinde. Es decir, la partición ortogonal reducida es la *proyección* de la partición ortogonal completa sobre las dimensiones no eliminadas. La Figura 6.9 muestra un ejemplo de reducción en una cartera formada por dos unidades de riesgo.

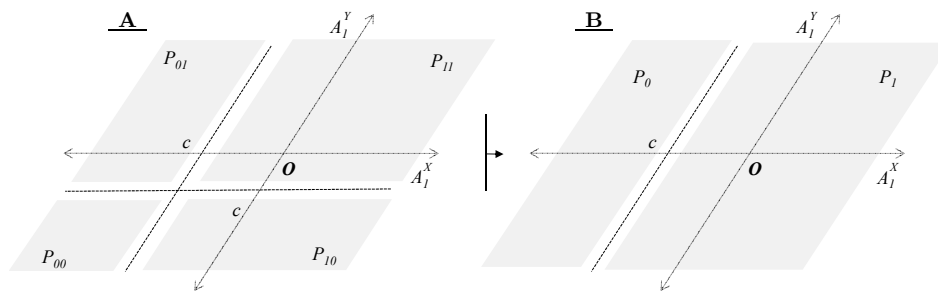


Figura 6.9: En (A) se representa la partición ortogonal del espacio de la primera innovación en una cartera formada por dos unidades, X e Y . En (B), la partición ortogonal se reduce mediante la unión de los elementos P_{01} con P_{00} y P_{11} con P_{10} . Se trata de la proyección de la partición mostrada en (A) para la primera innovación, A_1 , sobre la primera unidad, X .

Una vez reducida la partición, el cálculo de los pesos, el proceso de simulación y la estimación del percentil se realizarían según el procedimiento habitual. De hecho, en caso en que Q' se reduzca a 1, la partición reducida en el caso multivariante es similar a la partición completa en el caso univariante: en la primera, se recorren todas las unidades, fijada la primera innovación, mientras que en la segunda se recorren todos los periodos del horizonte de cálculo, fijada una unidad de riesgo. La semejanza no es total puesto que en el segundo caso las innovaciones sí son independientes entre sí.

La Figura 6.10 para el nivel de cobertura 99,9 y la Figura 6.11 para el 99,97 muestran los pesos de la partición reducida al caso $N' = 2$ y $Q' = 1$ en el último periodo de la ventana completa¹⁷, 2010Q4. Se ha empleado como dinámica subyacente la SUTSE y como estimaciones iniciales η^0 las obtenidas en el apartado 4.5.2. Destaca en ambos casos la capacidad discriminante de Tarjetas y en menor medida de Consumo.

¹⁷ Es decir, proyección sobre el espacio de la primera innovación y sobre cada par de unidades de riesgo del total de seis que forman la cartera ficticia definida en el apartado 4.3.

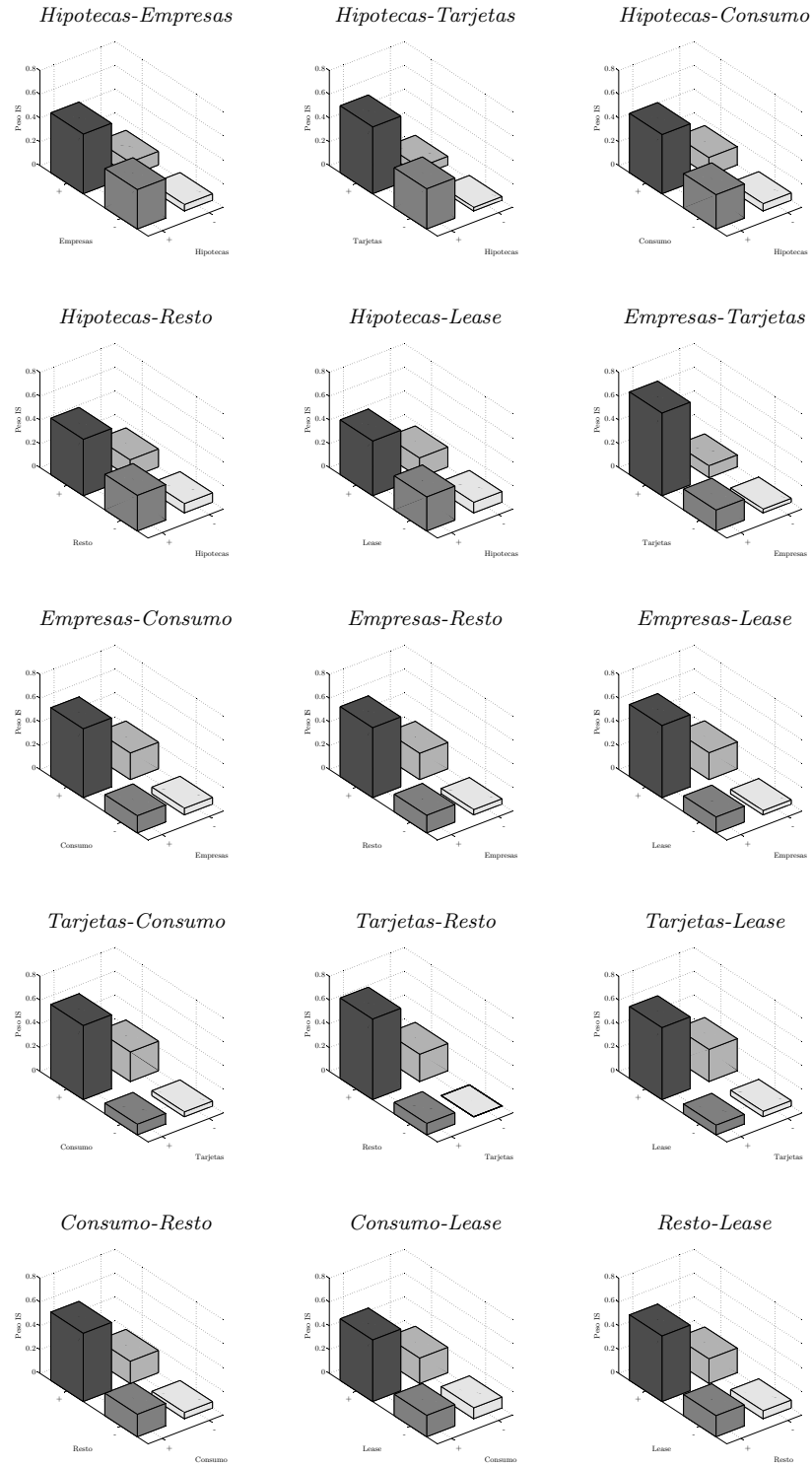


Figura 6.10: Pesos del esquema IS extendido a horizonte anual al 99,9 sobre la proyección bivalente de la partición ortogonal de la primera innovación en $t = 2010Q4$ para cada par de unidades. De más oscuro a menos, el par de innovaciones es $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ y $(-,-)$, siendo $+$ innovación positiva (“desfavorable”) y $-$ innovación negativa (“favorable”).

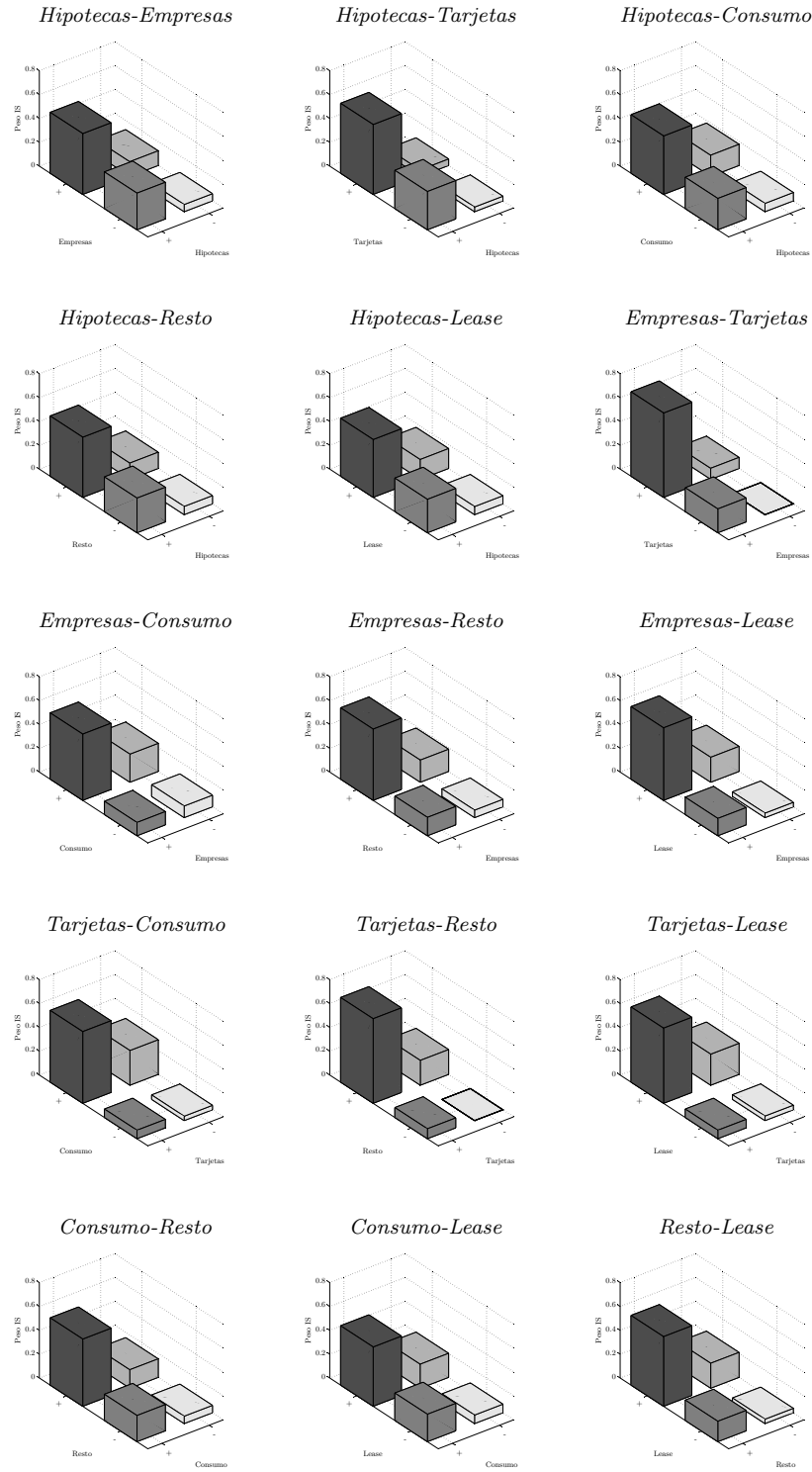


Figura 6.11: Pesos del esquema IS extendido a horizonte anual al 99,97 sobre la proyección bivalente de la partición ortogonal de la primera innovación en $t = 2010Q4$ para cada par de unidades. De más oscuro a menos, el par de innovaciones es $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ y $(-,-)$, siendo $+$ innovación positiva (“desfavorable”) y $-$ innovación negativa (“favorable”).

En lo que respecta al segundo punto, la dependencia entre innovaciones, en la práctica el problema equivale al de simular valores de una distribución multivariante no esférica, cuyas marginales pueden estar (i) truncadas por una de las dos colas en caso de no haber sido colapsada la dimensión, o (ii) no truncadas y con soporte completo en caso de que la partición se haya reducido en dicha dimensión. Cabe señalar que la complejidad aparece por la conjunción de ambas condiciones (distribución no esférica y truncamiento): si no se da la primera, la aplicación del método es inmediata y similar al caso univariante discutido en el apartado 6.4.3.

Pueden señalarse dos enfoques para sortear este problema.

Un enfoque consiste en recurrir a las componentes principales del vector de innovaciones, si éstas se distribuyen normalmente. Es decir, el esquema IS no se aplica sobre la distribución multivariante del vector de innovaciones, sino sobre la distribución multivariante del vector de componentes principales, que sí es esférica. De esta forma, el primero hereda, a través de la matriz de vértices de la descomposición singular, el sesgo en el muestreo inducido sobre el segundo. Entre muchos otros, [77] considera este procedimiento para un esquema de simulación eficiente distinto del propuesto y [75] lo discute en mayor detalle.

Otro enfoque resulta de conservar la aplicación del algoritmo sobre el vector de innovaciones y recurrir a metodologías de simulación alternativas que permitan simular valores de variables multidimensionales sobre regiones de su soporte. Entre ellas, cabe citar la simulación por rechazo (*rejection sampling*, [75]) o el muestreador de Gibbs (*Gibbs sampler*, [33]). Ésta última opción resulta, como muestra [73], especialmente adecuada para simular valores de las distribuciones multivariantes Normal o t-Student cuando éstas están truncadas en alguna de sus dimensiones.

Por último, es relevante notar que la implementación del esquema extendido a nivel cartera puede simplificarse en el caso de una dinámica factorial o de una dinámica que incorpore variables explicativas: si (i) el número de factores o controles es reducido, (ii) explican buena parte de la dinámica, y (iii) sus innovaciones son independientes de las restantes que incorpore la dinámica, entonces el esquema de simulación sobre el espacio de innovaciones puede aplicarse exclusivamente sobre las innovaciones asociadas a los factores o variable explicativas, lo que reduce la complejidad. Obviamente, la violación de (i) hace poco atractiva esta solución, la de (ii) la hace ineficaz, y la de (iii) impide su aplicación, puesto que no es posible prescindir de las restantes innovaciones.

Capítulo 7

Reparto del capital

7.1. Introducción

En este capítulo se aborda el proceso de reparto del capital agregado de la cartera entre las unidades que la forman, proceso introducido en el apartado 2.3.5 y revisado en mayor detalle en el Apéndice B, desde la perspectiva del modelo de distribución de PD propuesto. El objetivo es definir una metodología de reparto del capital de “ciclo económico completo” (i) alternativa a la que se deriva de la distribución “incondicional”, $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$, y (ii) sustentada en las distribuciones condicionales $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$ y su evolución a lo largo del tiempo. Es decir, la medición del riesgo de incumplimiento a través de las distribuciones condicionales aplicada ahora a la obtención de las métricas de riesgo diversificadas.

Cabe señalar que, en general, los trabajos que tratan el análisis del riesgo desde las distribuciones condicionales no abordan el proceso de reparto del capital, y los trabajos dedicados al reparto del capital no prestan especial atención a las distribuciones condicionales. Por ello, el análisis realizado resulta de interés para profundizar en la interacción de ambas cuestiones, la medición condicional y el reparto del capital.

La estructura del capítulo es la siguiente: en el segundo apartado se introduce el problema del reparto del capital con base en las distribuciones condicionales, en el tercero se expone la metodología propuesta y en el cuarto se discuten sus fundamentos y ventajas. En el quinto apartado se presentan algunos resultados empíricos.

7.2. Reparto del capital con base condicional

Como se discute en el Apéndice B, el reparto del capital agregado, \tilde{k} , representado por el vector de pesos $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}^1, \dots, \hat{r}^N)$, queda determinado por el reparto del VaR

agregado, $\tilde{\eta}$, representado en el vector $\mathbf{r} = (r^1, \dots, r^N)$, con:

$$\eta^{d,j} = r^j \tilde{\eta} \quad (7.1)$$

$$k^{d,j} = r^j \tilde{\eta} - \mu^j = \hat{r}^j \tilde{k} \quad (7.2)$$

siendo $\eta^{d,j}$ el VaR diversificado de la unidad j , $k^{d,j}$ su capital diversificado y μ^j su pérdida esperada, $j = 1, \dots, N$.

Por tanto, el objetivo es definir un método de reparto del VaR agregado para el conjunto de la ventana a partir de las distribuciones condicionales asociadas a ésta. Para ello, el punto de partida son los repartos del VaR condicional $\mathbf{r}_t = (r_t^1, \dots, r_t^N)$, $t = 1, \dots, T$, con $\sum_{j=1}^N r_t^j = 1$, obtenidos tras la aplicación de algún método de reparto estándar sobre el vector¹ $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$. El punto de llegada es un vector de pesos de “ciclo económico completo”, $\mathbf{r}^* = (r^{*1}, \dots, r^{*N})$, determinado por los vectores de pesos condicionales \mathbf{r}_t , $t = 1, \dots, T$, con el que repartir el VaR agregado, $\tilde{\eta}$, entre las distintas unidades. De forma similar, \hat{r}^{*j} indica el peso del reparto del capital que se deriva de r^{*j} .

Lo anterior implica que, independientemente de la aproximación que se siga para integrar los repartos condicionales, el reparto “incondicional” con base condicional puede interpretarse como un “metareparto”, en el sentido de que se sustenta en cualquier otro método estándar de asignación del VaR agregado, que actúa como subyacente y que provee los pesos r_t^j para cada periodo de la ventana t y para cada unidad de la cartera j , con $\sum_{j=1}^N r_t^j = 1$, $t = 1, \dots, T$.

Un método de reparto del capital definido en estos términos ofrece dos ventajas inmediatas.

Primera, la consideración de las componentes $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$ permite (i) anclar el reparto en distribuciones bien definidas, aunque la dinámica subyacente no sea estacionaria, y (ii) recoger explícitamente la evolución, a lo largo de la ventana de cálculo, de la contribución de cada unidad al VaR agregado.

Segunda, puede aplicarse sin dificultad sobre cualquier subventana de la ventana completa, como por ejemplo la formada por una época recesiva, aún cuando ésta tenga una longitud reducida. Esta clase de análisis puede ser útil en ejercicios de stress test, puesto que facilita el análisis de sensibilidad del reparto al escenario económico predominante en la ventana, así como a la longitud y composición de ésta.

Además, puesto que el proceso de reparto del capital no se ve restringido por el modelo de pérdida empleado para la estimación del VaR agregado “incondicional”, $\tilde{\eta}$, el reparto $\mathbf{r}^* = (r^{*1}, \dots, r^{*N})$ permite obtener cifras de capital diversificado sustentadas en las distribuciones condicionales, y por tanto obtenidas bajo una aproximación dinámica a la medición del riesgo, aún cuando las cifras de capital no diversificado se hayan

¹ A lo largo del capítulo la exposición se efectúa bajo la asunción de infinita granularidad, es decir, en términos de las distribuciones de PD, $\mathbf{\Pi}$ y \mathbf{W}_t . No obstante, su interpretación en términos de las distribuciones de pérdida, \mathbf{L} y \mathbf{L}_t , es inmediata.

estimado bajo una aproximación estática. Es decir, puede conjugarse un modelo de distribución \mathbf{F} estático para el cálculo de k^j y \tilde{k} con uno dinámico para el cálculo de $k^{d,j}$. Este enfoque puede ser útil si la entidad prefiere seguir planteamientos distintos, estático o dinámico, en función de la aplicación en la gestión que tenga la métrica de riesgo.

7.3. Esquema de reparto propuesto

Para la integración de los repartos condicionales, \mathbf{r}_t , $t = 1, \dots, T$, se propone una formulación lineal, ortogonal y con vector de pesos común a todas las unidades de la cartera, normalizado a la unidad y no negativo, es decir:

$$r^{*j} = \sum_{t=1}^T \omega_t r_t^j \quad (7.3)$$

con:

$$\sum_{t=1}^T \omega_t = 1, \quad 0 \leq \omega_t \leq 1 \quad (7.4)$$

Esta formulación cuenta con algunas características de interés: (i) es fácil de calcular, dada la sencillez de la expresión (7.3), (ii) es intuitiva, puesto que se trata de una media ponderada de los pesos condicionales con una misma ponderación para todas las unidades, lo que también tiene una clara interpretación económica, y (iii) asegura un reparto completo, como muestra la Proposición 7.1.

Proposición 7.1. *Para cualquier vector $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ que cumpla la condición dada en (7.4) se obtiene un reparto del capital $\mathbf{r}^* = (r^{*1}, \dots, r^{*N})$, $r^{*j} = \sum_{t=1}^T \omega_t r_t^j$, que cumple la condición de reparto completo del VaR agregado, $\sum_{j=1}^N r^{*j} = 1$, si los repartos condicionales $\mathbf{r}_t = (r_t^1, \dots, r_t^N)$, $t = 1, \dots, T$, también cumplen la condición de reparto completo.*

Demostración.

El resultado se deduce operando la expresión $\sum_{j=1}^N r^{*j}$ y aplicando la condición de repartos condicionales completos:

$$\sum_{j=1}^N r^{*j} = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \omega_t r_t^j = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N \omega_t r_t^j = \sum_{t=1}^T \omega_t \sum_{j=1}^N r_t^j = \sum_{t=1}^T \omega_t = 1 \quad (7.5)$$

■

Caracterizar la metodología propuesta requiere definir el vector $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_T)$.

Una aproximación natural supone tomar todos los pesos ω_t iguales, es decir:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(1/T, \dots, 1/T\right) \quad (7.6)$$

No obstante, esta definición no es sensible al hecho de que la contribución al VaR agregado “incondicional” de los distintos periodos que forman la distribución puede no ser homogénea, como se observó en el apartado 6.5.2. Ello sugiere considerar como deseables las siguientes propiedades informales para los pesos ω_t :

- Su cálculo debe fundamentarse en la distribución agregada condicional, \tilde{W}_t , puesto que ω_t es común a todas las unidades que forman la cartera.
- Deben reflejar la distinta influencia que cada componente $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$ tiene en la formación del VaR agregado “incondicional”, $\tilde{\eta}$, que es la cifra de VaR que se reparte entre las distintas unidades.

Bajo estas condiciones, se propone tomar como vector de ponderación $\boldsymbol{\omega}$ el vector de pesos del esquema de simulación eficiente propuesto sobre la dimensión temporal para la distribución agregada, $\tilde{\mathbf{v}}^*$, según lo expuesto en el apartado 6.3. La Figura 7.1 esquematiza la metodología propuesta de reparto del VaR con base en las distribuciones condicionales, cuya formulación final queda:

$$r^{*j} = \sum_{t=1}^T \tilde{v}_t^* r_t^j \quad (7.7)$$

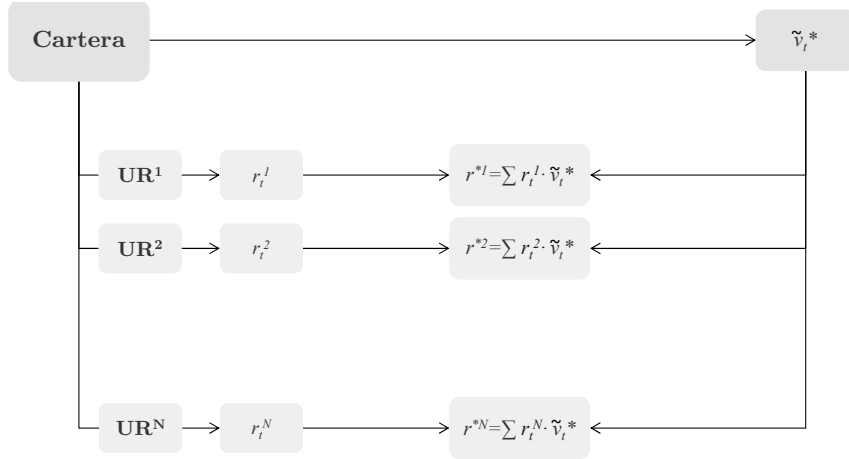


Figura 7.1: Diagrama de la metodología propuesta de reparto del capital agregado “incondicional” con base en las distribuciones condicionales.

El reparto del capital bajo la metodología propuesta, $\hat{\mathbf{r}}^* = (\hat{r}^{*1}, \dots, \hat{r}^{*N})$, se define entonces de la forma habitual a partir de \mathbf{r}^* :

$$\hat{r}^{*j} = \frac{r^{*j} \tilde{\eta} - \mu^j}{\tilde{k}} \quad (7.8)$$

7.4. Discusión

Bajo $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$, las distribuciones de pérdidas adoptan una estructura de mixtura según la cual cada región de la distribución “incondicional” se conforma a partir de las distribuciones condicionales que generan valores en el entorno de dicha región. En particular, la cola de la distribución “incondicional” viene determinada por las distribuciones condicionales que generan valores de PD más elevados. La metodología de reparto propuesta, en la que se integran los repartos condicionales mediante los pesos IS agregados, aprovecha este hecho, puesto que es el comportamiento en la cola de las distribuciones de pérdida individuales y agregada el que resulta relevante para establecer la contribución de cada unidad de riesgo al VaR agregado. Es decir, $\mathbf{r}^* = (r^{*1}, \dots, r^{*N})$ recoge el comportamiento de cada unidad en la cola de la distribución “incondicional” de forma indirecta a través del comportamiento en las distribuciones condicionales que conforman dicha cola. Esta es su característica principal y lo distingue de las aproximaciones habituales al problema, en las que el comportamiento en la cola se aborda directamente sobre la propia distribución “incondicional”.

Cabe señalar además que la integración de los repartos condicionales \mathbf{r}_t , $t = 1, \dots, T$, mediante el vector de pesos IS agregado, $\tilde{\mathbf{v}}^* = (\tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_T^*)$, no sólo ofrece una respuesta cualitativa al problema de identificar las distribuciones condicionales que determinan la cola de la distribución “incondicional”, $\tilde{v}_t^* > 0$, sino también cuantitativa, en el sentido de distinguir el grado de contribución de cada distribución condicional a dicha cola. Es, por tanto, preferible a cualquier elección subjetiva de los periodos más desfavorables dentro de la ventana de “ciclo económico completo”.

Sobre la metodología de reparto propuesta pueden destacarse cuatro aspectos.

Primero, en la práctica es de esperar que buena parte de los periodos que conforman la ventana de cálculo tengan pesos \tilde{v}_t^* casi nulos, por lo que sólo un reducido grupo de repartos condicionales \mathbf{r}_t determinará \mathbf{r}^* . Por ello, que una unidad tenga una contribución reducida al VaR agregado condicional en buena parte de la ventana resultará irrelevante si los periodos donde la contribución sí es significativa coinciden con aquéllos de mayor pérdida agregada, es decir, de mayor peso \tilde{v}_t^* . Lo determinante es, en consecuencia, el desempeño de las distribuciones condicionales en los peores periodos del ciclo económico.

Segundo, es sensible al nivel de cobertura, u , por dos vías: a través de los repartos condicionales, siempre que éstos sean sensibles a u , y a través los pesos del esquema IS para la distribución agregada. Éste último tiene una influencia notable: a mayor nivel de cobertura, menor número de periodos con peso IS significativamente positivo, por lo que el número de esquemas condicionales \mathbf{r}_t que determina \mathbf{r}^* también es menor. La dinámica subyacente de $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$ también afecta a los pesos del reparto propuesto por estas dos vías: influye en los repartos condicionales e influye en los pesos del esquema IS agregado.

Tercero, la consideración de subventanas no implica actualizar los repartos condicionales, que dependen exclusivamente del vector de distribuciones condicionales

$\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$, pero sí los pesos del esquema IS agregado, $\tilde{\mathbf{v}}^* = (\tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_T^*)$, que son relativos a la ventana considerada.

Cuarto, cuanto más estables sean los HR a lo largo de la ventana, más se asemejará el reparto propuesto a una media simple de los esquemas condicionales, puesto que la dispersión del vector de pesos IS será menor.

La metodología de reparto planteada constituye una doble aportación. Por un lado, por considerar el problema de reparto del capital desde una perspectiva condicional y definir el esquema de pesos para la ventana completa como una media ponderada de los pesos condicionales de cada unidad. Por otro, y dado el punto anterior, por emplear como vector de ponderación $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_T)$ el vector de pesos del esquema IS agregado sobre la dimensión temporal definido en el apartado 6.5.2.

En lo que respecta a la primera contribución, la metodología propuesta completa la familia de métricas de capital exploradas en este trabajo: diversificadas y no diversificadas para (i) la distribución “incondicional” II, obtenida como mixtura de las distribuciones condicionales W_t , (ii) cada distribución condicional W_t , y (iii) el conjunto de la ventana de cálculo a partir de las métricas condicionales, como alternativa a las obtenidas en (i). Esta estructura sintetiza la visión del riesgo de incumplimiento explorada en este trabajo y el papel central que las distribuciones condicionales tienen en ella.

En lo que respecta a la segunda contribución, la elección de $\tilde{\mathbf{v}}^*$ como vector de ponderación $\boldsymbol{\omega}$ garantiza que su suma sea igual a la unidad y cumple con las dos condiciones fijadas: (i) hace depender el reparto de la distribución agregada, y (ii) da mayor peso a las distribuciones condicionales \mathbf{W}_t más *importantes* en la generación del VaR agregado “incondicional”, $\tilde{\eta}$. Además, se ligan así dos conceptos aparentemente distantes: el tratamiento computacional y la obtención de métricas de riesgo diversificadas. Esta relación añade consistencia a, y subraya las ventajas que se derivan de, la medición del riesgo de incumplimiento a través de las distribuciones condicionales.

Ambas aportaciones establecen un punto de vista novedoso que plantea una familia alternativa de repartos de capital: aquélla en la que los pesos “incondicionales” se obtienen a partir de los pesos condicionales. Resulta por ello difícil relacionarlo con la literatura. Aún así, pueden trazarse algunas analogías con otros desarrollos, como las medidas de riesgo dinámicas, [137], y el reparto del capital con base en ellas, [37], que también comparten el interés por recoger la evolución temporal del riesgo, si bien el planteamiento es distinto: una medida de riesgo dinámica es una medida de riesgo que actúa sobre un proceso estocástico en vez de sobre una variable aleatoria (medida de riesgo “estática”). Por el contrario, el método propuesto supone aplicar T repartos estáticos a lo largo del eje temporal y posteriormente integrarlos para obtener un nuevo reparto para el conjunto de la ventana. [110] también considera las distribuciones condicionales en el proceso de reparto del capital, pero en un contexto completamente distinto, la optimización del capital, y, sobre todo, sin abordar la integración de los pesos condicionales con el fin de obtener un reparto para el conjunto de la ventana.

7.5. Análisis empírico

7.5.1. Introducción

El análisis empírico efectuado se sustenta en la cartera sintética definida en el apartado 4.3. Es decir, una cartera formada por las seis unidades de riesgo norteamericanas para la que se asume infinita granularidad y exposición efectiva total de la unidad igual a 1. Ello implica que $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N) \equiv \mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$ y $\sum_{j=1}^N L^j = \tilde{L} \equiv \tilde{\Pi} = \sum_{j=1}^N \Pi^j$, es decir, todas las unidades tienen el mismo peso y éste es igual a 1.

El análisis se estructura en dos partes.

En la primera parte se obtienen los pesos condicionales r_t^j , $t = 1, \dots, T$, $j = 1, \dots, N$, empleados en la definición de r^{*j} , $r^{*j} = \sum_{t=1}^T \tilde{v}_t^* r_t^j$. Se han calculado para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97 del VaR agregado, $\tilde{\eta}$, y según los métodos de reparto de Varianzas - Covarianzas (VC) y Expected Shortfall (ES). Ambos métodos de reparto se introducen brevemente en el Apéndice B. Como dinámica subyacente se ha empleado la formulación SUTSE, presentada en el apartado 3.5.2.2.

En la segunda parte se comparan los pesos y ratios de diversificación para la ventana completa según la metodología “incondicional” (aplicación del reparto sobre $\tilde{\Pi}$) y según la metodología propuesta en el apartado 7.3. Como en la primera parte del ejercicio, se han considerado los niveles de cobertura 99,9 y 99,97, los métodos de reparto VC y ES y la dinámica subyacente SUTSE.

7.5.2. Pesos del reparto condicional

La Figura 7.2 para el nivel de cobertura 99,9 y la Figura 7.3 para el 99,97 muestran, estandarizadas y para cada unidad, las series de HR, los pesos condicionales de reparto del VaR agregado, $\tilde{\eta}$, por el método VC y los pesos condicionales por el método ES. En la Figura 7.4 se comparan todas las series juntas, sombreándose además los periodos con peso $\tilde{v}_t^* > 0$, es decir, los periodos considerados en el reparto del VaR agregado “incondicional” bajo la metodología propuesta.

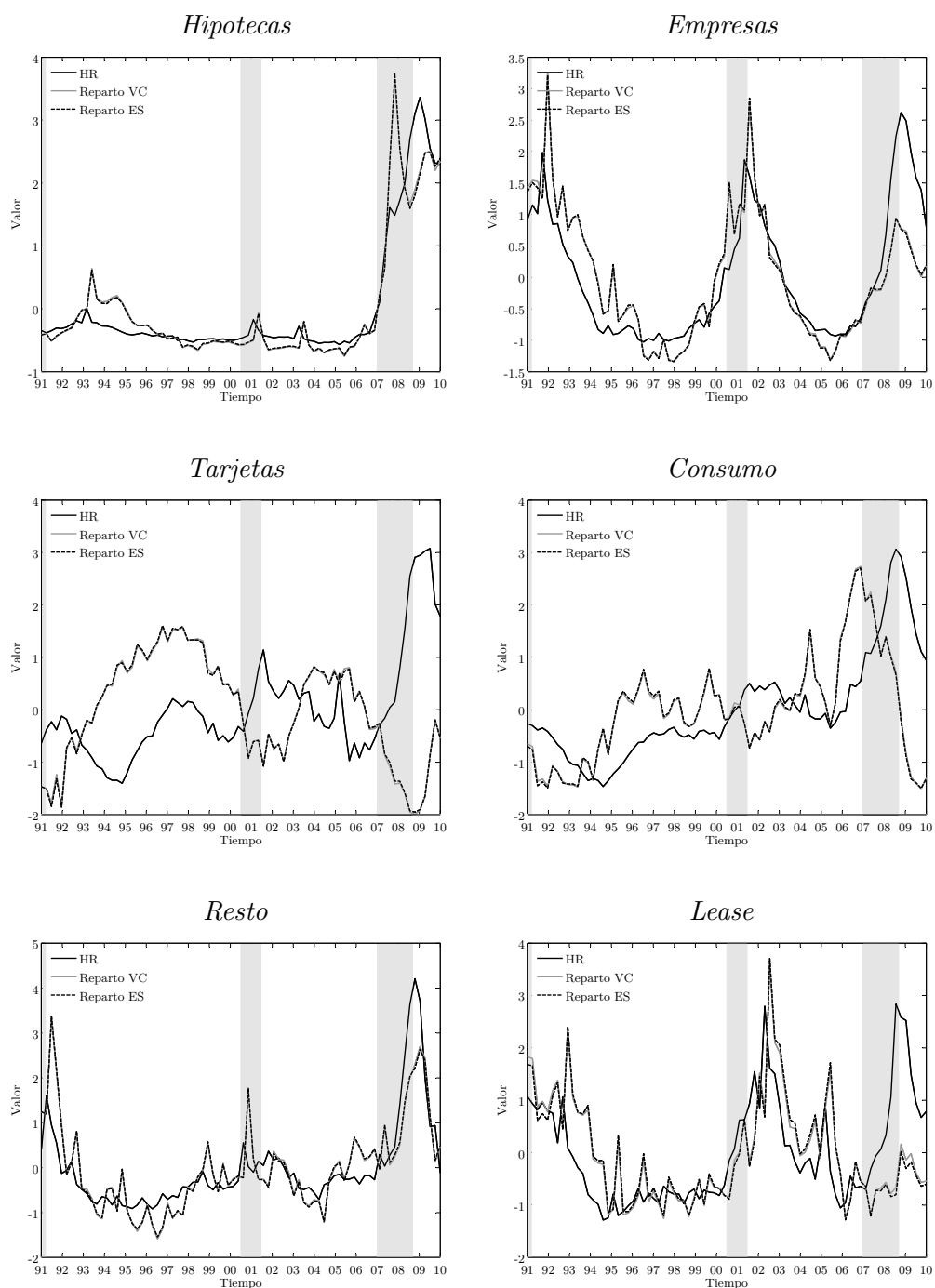


Figura 7.2: Pesos condicionales del reparto del VaR según los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall) para el nivel de cobertura 99,9. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

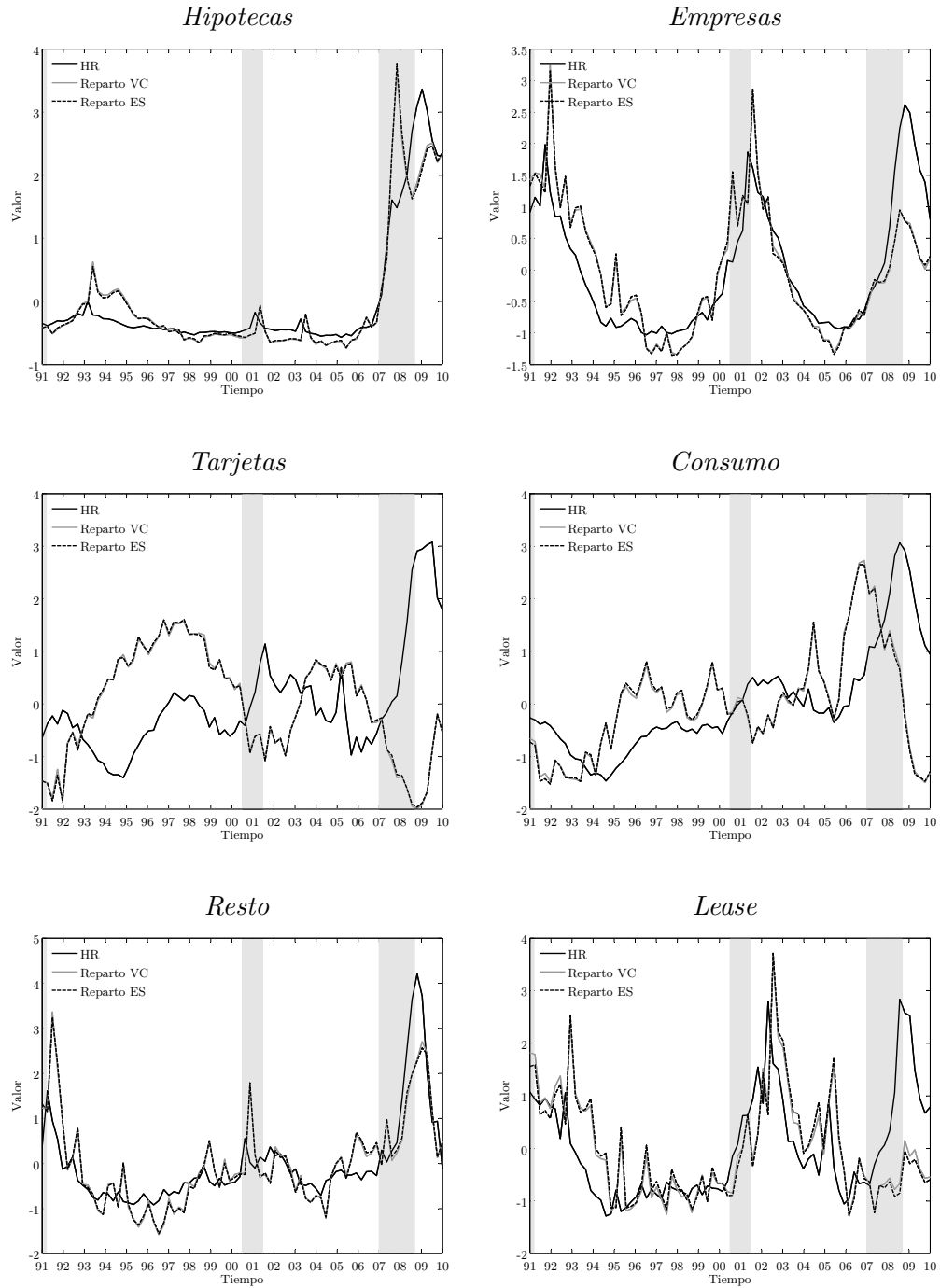


Figura 7.3: Pesos condicionales del reparto del VaR según los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall) para el nivel de cobertura 99,97. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.

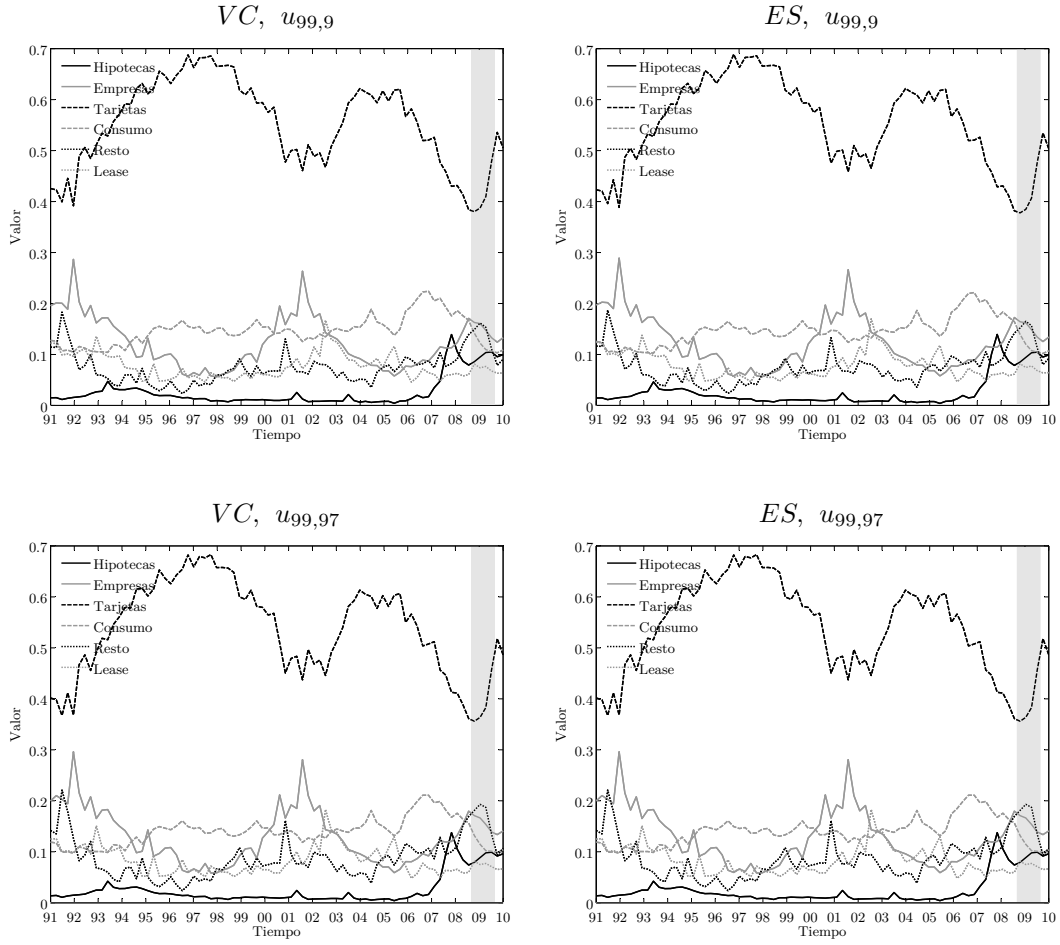


Figura 7.4: Pesos condicionales del reparto del VaR según los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall) para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97. La zona sombreada indica periodo con peso IS agregado en la dimensión temporal positivo, $\tilde{v}_t^* > 0$.

En ambos niveles de cobertura y métodos de reparto se aprecia un comportamiento diferencial entre dos grupos de unidades.

Por un lado, el formado por Hipotecas, Empresas, Resto y Lease, en el que los pesos condicionales presentan un comportamiento fuertemente similar a la propia serie de HR, lo que conlleva un comportamiento cíclico. Por otro lado, el formado por Tarjetas y Consumo, para las que se observa un comportamiento opuesto al de la serie de HR y por ello anticíclico. Puesto que los pesos condicionales siempre tienen que sumar 1, la disminución de éste en una unidad implica su aumento en todas o parte de las restantes, por lo que el efecto apreciado implica la división de la cartera en dos bloques, cuyo peso condicional crece y decrece a costa, o en favor, del otro.

La explicación a este efecto puede encontrarse en el hecho de que las seis series de HR tienden a igualarse en los periodos recesivos, mientras que en los restantes Tarjetas y Consumo presentan un nivel más elevado. Así se observa en la Figura 7.5, que compara, estandarizadas, la serie de HR medio de Hipotecas, Empresas, Resto y Lease con dos ratios, el cociente de la serie de HR de Tarjetas entre la serie de HR medio anterior y el mismo cociente para Consumo. En dicho gráfico se evidencia como, en términos relativos, la diferencia de estas dos unidades con las restantes tiende a caer en los periodos recesivos y tiende a aumentar en los periodos expansivos.

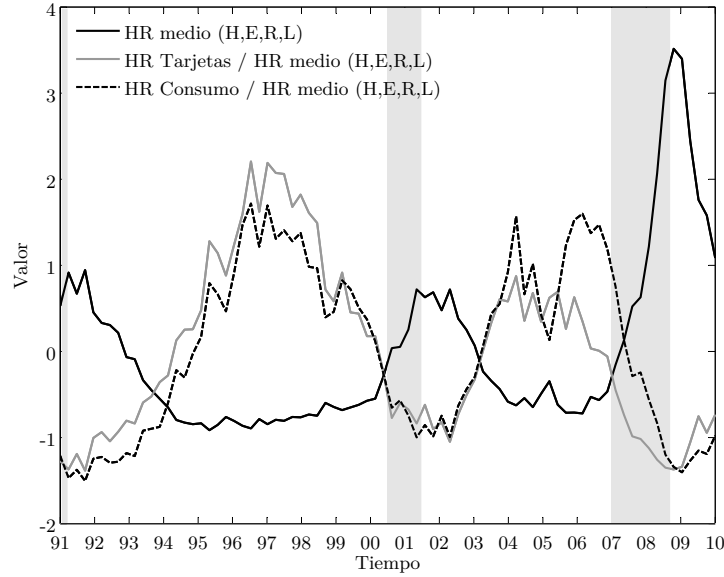


Figura 7.5: *HR medio de Hipotecas, Empresas, Resto y Lease y ratios de HR de Tarjetas y Consumo entre dicho HR medio. Las series se presentan estandarizadas. La zona sombreada indica periodo de recesión según el NBER.*

Este efecto se traslada a las varianzas de las distribuciones condicionales W_t^j , que dependen positivamente del HR según lo expuesto en el apartado 5.3. En consecuencia, el peso de cada unidad en la varianza de la distribución agregada \tilde{W}_t tiende a igualarse y con ello los pesos del reparto del capital a nivel condicional, puesto que tanto el capital agregado, \tilde{k}_t , como los individuales, k_t^j , dependen de forma positiva, todo lo demás igual, de la varianza de sus correspondientes distribuciones, \tilde{W}_t y W_t^j . El resultado

final es un comportamiento cíclico en el primer grupo (Hipotecas, Empresas, Resto y Lease), y anticíclico en el segundo (Tarjetas y Consumo).

Este comportamiento, no apuntado en trabajos previos, es relevante puesto que muestra que la contribución al VaR agregado condicional de las unidades que conforman una cartera puede variar con el tiempo, presentando incluso comportamientos cíclicos o anticíclicos. Es, por tanto, una información útil para entidades y supervisores que, obviamente, un marco estático no puede suministrar.

7.5.3. Comparación de metodologías de reparto

La Tabla 7.1 y la Tabla 7.2 recogen, respectivamente, los pesos y ratios de diversificación del reparto del capital agregado, \tilde{k} , para la metodología “incondicional” y la propuesta con base condicional. De los resultados obtenidos pueden destacarse dos grandes aspectos. Por un lado, las diferencias en los pesos del reparto, y por ello en las cifras de diversificación, ya que el VaR agregado “incondicional” permanece fijo, entre ambas enfoques de reparto, “incondicional” y propuesto, dada una unidad, un método subyacente (VC y ES) y un nivel de cobertura (99,9 y 99,97). Por otro lado, la mayor semejanza, dada una unidad y nivel de cobertura, entre los pesos VC y ES bajo la metodología propuesta que bajo la estandar.

En lo que respecta a las diferencias en los pesos y ratios de diversificación, bajo la metodología planteada (i) Tarjetas y Consumo obtienen un porcentaje del capital agregado menor y mayor diversificación, (ii) Empresas, Resto y Lease obtienen un porcentaje del capital agregado mayor y menor diversificación, y (iii) Hipotecas recibe una porción similar del capital agregado y en consecuencia conserva un ratio de diversificación parecido.

<i>Unidad</i>	$\hat{r}_{99,9}$		$\hat{r}_{99,9}^*$		$\hat{r}_{99,97}$		$\hat{r}_{99,97}^*$	
	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>
Hipotecas	0,1225	0,1229	0,1242	0,1173	0,1225	0,1180	0,1206	0,1152
Empresas	0,1713	0,1764	0,1768	0,1817	0,1713	0,1772	0,1788	0,1832
Tarjetas	0,3668	0,3099	0,3159	0,2897	0,3668	0,3061	0,3131	0,2840
Consumo	0,1325	0,1096	0,1025	0,0944	0,1325	0,1060	0,1016	0,0930
Resto	0,1319	0,2031	0,1997	0,2366	0,1319	0,2144	0,2041	0,2448
Lease	0,0750	0,0781	0,0809	0,0802	0,0750	0,0784	0,0818	0,0798

Tabla 7.1: Pesos del reparto del capital según la metodología “incondicional”, \hat{r} , y propuesta, \hat{r}^* , para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97 y para los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall).

<i>Unidad</i>	$\lambda_{99,9}$		$\lambda_{99,9}^*$		$\lambda_{99,97}$		$\lambda_{99,97}^*$	
	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>
Hipotecas	0,3730	0,3709	0,3649	0,3998	0,4065	0,4286	0,4147	0,4405
Empresas	0,1797	0,1550	0,1476	0,1240	0,2140	0,1868	0,1692	0,1491
Tarjetas	0,0443	0,1927	0,1787	0,2468	0,0518	0,2087	0,1857	0,2613
Consumo	0,1252	0,2767	0,3197	0,3736	0,1231	0,2988	0,3193	0,3772
Resto	0,4476	0,1495	0,1560	0,0002	0,4967	0,1821	0,2103	0,0526
Lease	0,3577	0,3307	0,3014	0,3070	0,4125	0,3860	0,3465	0,3627

Tabla 7.2: Ratios de diversificación del reparto del capital según la metodología “incondicional”, λ , y propuesta, λ^* , para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97 y para los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall).

Este comportamiento es consistente con el comportamiento anticíclico (Tarjetas y Consumo) y cíclico (Hipotecas, Empresas, Resto y Lease) de los pesos condicionales durante los periodos que forman la Gran Recesión, que son los únicos con peso ω_t positivo (o, equivalentemente, los únicos con peso IS agregado $\tilde{v}_t^* > 0$). Es decir, el comportamiento de las series de HR, que tienen a igualarse en las recesiones, hace que durante la Gran Recesión sus pesos condicionales se acerquen. Puesto que la metodología de reparto planteada considera, en este caso, exclusivamente el comportamiento de los pesos condicionales en la Gran Recesión, se obtienen unos pesos de “ciclo económico completo” más próximos entre unidades bajo la metodología propuesta que bajo la “incondicional”. La consecuencia inmediata es un beneficio de la diversificación más equilibrado.

De esta forma, una unidad cuya contribución relativa al VaR agregado condicional varíe a lo largo del tiempo de forma opuesta a la del resto de unidades de la cartera, como es el caso de Tarjetas y Consumo, puede verse beneficiada bajo el esquema de reparto propuesto. Lo determinante es, en resumen, el comportamiento en los peores periodos de la ventana de cálculo.

Por su parte, que las dos metodologías de reparto condicional, VC y ES, arrojen pesos más próximos en el enfoque propuesto que en el estándar resulta consistente con el hecho de que las distribuciones condicionales $\mathbf{W}_t = (W_t^1, \dots, W_t^N)$ presentan una morfología más regular que las distribuciones para el conjunto de la ventana, $\mathbf{\Pi} = (\Pi^1, \dots, \Pi^N)$. Por ello, carecen de las características (multimodalidad, elevada curtosis, etc.) que pueden causar diferencias significativas entre ambos métodos de reparto a nivel condicional.

Éste es un resultado relevante ya que evidencia la estabilidad del enfoque propuesto ante cambios en el método de reparto subyacente, cuya elección deja así de ser crítica. Este hecho (i) facilita la comunicación de la cifra de capital diversificado y su integración en la gestión de la entidad, ya que se evitan recelos sobre la metodología empleada y su influencia en los resultados, y (ii) permite caracterizar las distribuciones con un número de simulaciones menor, con el consiguiente ahorro de coste computacional.

De hecho, los pesos $\hat{\mathbf{r}}^*$ obtenidos bajo la metodología de reparto propuesta, tanto

en VC como en ES, se aproximan a los que se obtienen bajo la metodología estándar, $\hat{\mathbf{r}}$, en el caso del reparto ES. Ello subraya la idoneidad del primero, puesto que logra un reparto sensible al comportamiento en la cola aún cuando se emplee como subyacente una metodología como VC, centrada en las varianzas y covarianzas de las distribuciones de pérdida individuales².

Finalmente, cabe señalar que la elección de la ponderación uniforme, $\omega_t = 1/T$, frente a la ponderación propuesta, $\omega_t = \tilde{v}_t^*$, conduce a resultados completamente inadecuados, con una diversificación excesiva en algunas unidades y la violación del principio de reparto solidario³ en otras, como muestra la Tabla 7.3. Este hecho apoya la elección de una ponderación sensible a la influencia que cada periodo tiene en el VaR agregado, $\tilde{\eta}$. Eso es lo que se logra, precisamente, con el uso como ponderación de los pesos del esquema IS agregado $\tilde{\mathbf{v}}^* = (\tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_T^*)$.

<i>Unidad</i>	$\hat{r}_{99,9}^*$		$\hat{r}_{99,97}^*$		$\lambda_{99,9}^*$		$\lambda_{99,97}^*$	
	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>	<i>VC</i>	<i>ES</i>
Hipotecas	0,0205	0,0188	0,0204	0,0186	0,8951	0,9038	0,9010	0,9097
Empresas	0,1255	0,1319	0,1268	0,1338	0,3948	0,3638	0,4107	0,3782
Tarjetas	0,5586	0,5404	0,5571	0,5354	-0,4522	-0,4049	-0,4489	-0,3925
Consumo	0,1357	0,1282	0,1334	0,1255	0,1001	0,1495	0,1063	0,1596
Resto	0,0777	0,0922	0,0792	0,0961	0,6715	0,6104	0,6935	0,6282
Lease	0,0820	0,0884	0,0831	0,0906	0,2920	0,2361	0,3364	0,2762

Tabla 7.3: Pesos y ratios de diversificación del reparto del capital según la metodología propuesta con ponderación uniforme, $\omega_t = 1/T$, para los niveles de cobertura 99,9 y 99,97 y para los métodos de reparto VC (Varianzas-Covarianzas) y ES (Expected Shortfall).

² Como se apunta en el Apéndice B, el método de reparto ES es, en general, más sensible a la contribución de cada unidad a la cola de la distribución agregada, una propiedad deseable en caso de que dicha distribución siga un comportamiento irregular.

³ Es decir, mayor capital diversificado que no diversificado, como se discute en el Apéndice B.

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la utilidad de las distribuciones condicionales de probabilidad de incumplimiento como instrumento general con el que abordar el análisis y medición del riesgo de incumplimiento. Se ha prestado especial atención a su uso como alternativa a las aproximaciones estáticas en la medición incondicional, opuesta a la condicional y cuya finalidad es la de recoger un comportamiento de largo plazo en vez del condicionado a un escenario macroeconómico dado o, en general, a un instante determinado del ciclo económico.

Este objetivo *(i)* profundiza en otros desarrollos precedentes que, con un alcance más limitado, también han tratado las distribuciones condicionales en el ámbito del riesgo de incumplimiento, como [132] y [161], y *(ii)* ha motivado la obtención de resultados analíticos y empíricos y la proposición, discusión y comprobación de soluciones alternativas a cuestiones relevantes en el ámbito del riesgo de incumplimiento.

Los resultados obtenidos permiten extraer las siguientes conclusiones:

1. La aproximación dinámica a la modelización de la distribución de probabilidad de incumplimiento, en la que se enmarcan las distribuciones condicionales, cuenta con fundamentos más sólidos que los que sustentan la aproximación estática. Las ventajas que suelen esgrimirse en favor de la segunda, como su sencillez o la capacidad para representar comportamientos de largo plazo, resultan cuestionables: la primera puede conducir a resultados inadecuados y la segunda no es, en realidad, exclusiva de esta aproximación, puesto que ha sido posible abordar una medición incondicional desde una perspectiva dinámica.
2. Las distribuciones condicionales enriquecen la medición del riesgo de incumplimiento. Permiten obtener métricas que informan del comportamiento de la cartera a lo largo del tiempo, así como métricas de “ciclo económico completo” alternativas a las que se derivan de la distribución incondicional, incluso para ventanas reducidas asociadas a entornos económicos concretos, como los de recesión o expansión. Esta información no puede obtenerse en un marco estático.
3. El análisis del riesgo de incumplimiento a lo largo del eje temporal resulta esencial

para comprender la respuesta de éste a la evolución del ciclo económico. Además, permite detectar comportamientos singulares y ayuda a explicar los resultados obtenidos en la medición incondicional.

4. Las distribuciones condicionales suponen una herramienta útil en la modelización del riesgo de incumplimiento. Ofrecen soluciones flexibles, intuitivas y bien definidas.
5. La ventana temporal empleada en la calibración de la distribución incondicional influye significativamente en las métricas de riesgo (pérdida esperada, VaR, capital y correlación de activos) y en el grado de dependencia entre las unidades de riesgo (grupos homogéneos de deudores) que contiene la cartera, tanto a nivel individual como agregado. Variaciones en su longitud, homogeneidad y composición, en especial en la proporción de periodos favorables y desfavorables, pueden hacer aumentar o disminuir la pérdida esperada, el VaR, el capital o la diversificación, en ocasiones en direcciones opuestas.
6. En términos empíricos, el riesgo de incumplimiento presenta (i) un significativo comportamiento cíclico que se acentúa en las recesiones en relación a la severidad de éstas, y (ii) cierto grado de heterogeneidad entre tipos de producto, con comportamientos diferenciados en función del entorno económico de referencia y del tipo de medición realizada, condicional o incondicional, diversificada o no diversificada.

Estos puntos tienen una implicación clara para la gestión del riesgo de incumplimiento: las distribuciones condicionales y, en general, la aproximación dinámica, merecen un protagonismo mayor en su proceso de análisis y medición. Pueden ser consideradas por entidades y organismos supervisores para una amplia variedad de propósitos que exceden su uso tradicional en el análisis de escenarios o la predicción. Por el contrario, la aproximación estática y, en especial, la medición incondicional sustentada en ésta, deben ser reconsideradas y aplicadas siempre con cautela. Ello incluye al propio modelo regulatorio de distribución de probabilidad de incumplimiento, principal exponente de la aproximación estática.

La contribución fundamental del trabajo consiste, por tanto, en evidenciar, analítica y empíricamente, el enorme potencial de las distribuciones condicionales en el tratamiento del riesgo de incumplimiento sistémico, es decir, el recogido en la distribución de probabilidad de incumplimiento estocástica. Ello supone una aportación al propio problema que constituye su medición, a la revisión crítica surgida tras la Gran Recesión y al debate metodológico sobre las aproximaciones estática y dinámica. Dicha contribución integra los siguientes puntos.

1. Se han analizado las debilidades de la medición incondicional en presencia de comportamiento no estacionario de la tasa de impago, un aspecto no tratado en otras revisiones críticas, como la de [43], incluyendo en dicho análisis las implicaciones conceptuales y los problemas que pueden derivarse para la gestión del riesgo de la entidad. Además, se han revisado las mejoras que el enfoque dinámico

y, en particular, las distribuciones condicionales, introducen en respuesta a estas debilidades.

2. Se ha propuesto un modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento con el que se obtiene una medición incondicional coherente con las debilidades que surgen en caso de no estacionariedad de la tasa de impago. El modelo se define como una mixtura uniforme de las distribuciones condicionales asociadas a la ventana temporal considerada, lo que (i) permite obtener una medición incondicional *condicionada* a la evolución de la tasa de impago observada en dicha ventana, y (ii) supone una mejora respecto del marco no paramétrico, [28], y el de cambio de régimen, [131]. Se han discutido los fundamentos del modelo, incluida su consistencia en caso de que la tasa de impago sí sea estacionaria, así como las consideraciones prácticas asociadas a su uso y las ventajas que ofrece respecto a la aproximación estática, entre las que se incluyen (i) ausencia de hipótesis restrictivas sobre el comportamiento de largo plazo de la probabilidad de incumplimiento, (ii) mayor versatilidad y carácter estructural, y (iii) clara interpretación económica.
3. A partir de series públicas norteamericanas de tasas de impago por tipo de producto (hipotecas, préstamos a empresas, tarjetas de crédito, etc.) provenientes del FDIC (*Federal Deposit Insurance Corporation*), se ha obtenido evidencia empírica sobre la sensibilidad de las métricas de riesgo al modelo de distribución de probabilidad de incumplimiento, en especial al tipo de aproximación seguida (estática o dinámica), a la ventana temporal que determina la medición incondicional y a la dinámica que siguen las tasas de impago por unidad de riesgo. Los ejercicios planteados han cubierto aspectos no tratados en otros análisis empíricos, como los de [132] y [143], y han mostrado resultados relevantes. En particular, se ha subrayado la flexibilidad del modelo de distribución propuesto, las limitaciones de la aproximación estática, el comportamiento dispar de las métricas de riesgo ante la composición de la ventana y la importancia de recoger adecuadamente el comportamiento cointegrante de las tasas de impago en caso de existir éste.
4. Se ha llevado a cabo un análisis condicional del riesgo de incumplimiento, centrado en las distribuciones condicionales de probabilidad de impago, sus métricas de riesgo y la evolución de éstas a lo largo del tiempo en función del ciclo económico. Dicho análisis, sustentado en un estudio analítico y completado con ejercicios empíricos, ha permitido entender mejor, respecto a otros análisis sobre la evolución cíclica del riesgo de incumplimiento, como el de [106], cómo varían dichas métricas, por qué lo hacen y qué consecuencias se derivan de ello para la gestión del riesgo de la entidad.
5. Se ha estudiado, desde la perspectiva de las distribuciones condicionales, el problema de la determinación del nivel de cobertura incondicional que deben proporcionar los recursos propios de la entidad. Se ha propuesto una metodología en la que los accionistas determinan el nivel de cobertura condicional que desean en cada periodo y en la que se obtienen, de forma adicional, los niveles de cobertura condicional finalmente esperados dada una cifra de recursos propios. La definición de ambos conceptos, niveles de cobertura condicional *esperados* y *deseados*,

ha permitido abordar, a diferencia del planteamiento seguido en [133], dos cuestiones: (i) explicar la relación entre la solvencia incondicional y la condicional, y (ii) entender por qué, pese a contar con una cobertura incondicional elevada, una entidad puede ver cuestionada su solvencia en un escenario adverso.

6. Se han definido dos algoritmos de simulación eficiente del modelo propuesto de distribución de probabilidad de incumplimiento. Ambos se sustentan en la técnica de reducción de la varianza *importance sampling* y consisten en modificar la mixtura uniforme por una no uniforme en la que las distribuciones condicionales que generan valores más altos reciben un peso relativo mayor. Se ha establecido su calibración óptima y se han discutido sus propiedades y ventajas respecto a otros desarrollos, como los de [76] y [125], entre las que destacan la sencillez de su implementación y la significativa mejora en la eficiencia de la estimación del VaR respecto a la simulación de Monte Carlo estándar.
7. Se ha propuesto una metodología de reparto del capital agregado incondicional de la cartera entre las unidades de riesgo que la forman. La principal característica de esta metodología es la de sustentarse en los repartos a nivel condicional, obtenidos mediante algún método de reparto estándar que actúa como *subyacente*. Este enfoque supone una ruptura con los planteamientos existentes, como los presentados en [153]. Los repartos condicionales se integran mediante una expresión lineal que, haciendo uso de los esquemas de simulación eficiente propuestos previamente, prepondera los periodos vinculados a la determinación del capital agregado. Se ha establecido la consistencia del reparto así definido y se han efectuado ejercicios empíricos que han mostrado sus buenas propiedades, incluida la robustez ante cambios en el método de reparto subyacente.

El potencial demostrado por las distribuciones condicionales sugiere profundizar en las cuestiones tratadas en este trabajo y explorar otras nuevas.

En lo que respecta a las cuestiones abordadas, cabe destacar las siguientes acciones:

1. Extender el enfoque propuesto para la distribución de probabilidad de incumplimiento incondicional, mixtura uniforme de distribuciones condicionales, a otros ámbitos del riesgo de crédito, entre los que cabe destacar (i) la exposición al riesgo y la tasa de no recuperación estocásticas, exploradas en [10] y [142], (ii) el marco de migración, con la consideración de distribuciones condicionales de migración por nivel de calificación, (iii) los modelos de contagio, donde sería relevante plantear mecanismos con los que propagar el contagio a lo largo del horizonte de cálculo, y (iv) la modelización conjunta de varios riesgos, abordada por [12], en cuyo caso la dependencia entre los mismos, tradicionalmente tratada a través de *cóputas*, podría definirse a nivel condicional.
2. Profundizar en el análisis de la influencia que la ventana temporal tiene en la medición incondicionales, aprovechando para ello la teoría de mixturas finitas y los resultados analíticos obtenidos sobre el comportamiento de las distribuciones condicionales. Se trataría de explorar la *derivada topológica* de las métricas de

riesgo incondicionales respecto al conjunto de distribuciones condicionales que compone la mixtura uniforme.

3. Afinar algunos de los desarrollos planteados. Por ejemplo, mediante (i) la definición de criterios de optimización multiobjetivo que permitan obtener esquemas de simulación eficiente para varios niveles de cobertura al mismo tiempo, (ii) el planteamiento de una metodología que permita relacionar los escenarios condicionantes observados por la entidad y los observados por la agencia de calificación de referencia, y (iii) el análisis de las aplicaciones que puede ofrecer la información que se obtiene de los esquemas de simulación eficiente en los ejercicios de stress test.
4. Realizar nuevos estudios empíricos que complementen la evidencia obtenida para el mercado norteamericano. Pueden plantearse ejercicios sobre series reales de tasa de impago por líneas de negocio para otros países, como las empleadas para Alemania en [140] o a nivel agregado para varios países, como en el ejercicio presentado en [132]. Además, dado que pueden emplearse series agregadas de muchos países, este ejercicio podría ofrecer resultados de interés para el análisis del riesgo sistémico.

Sobre las nuevas líneas de investigación, resulta de interés abordar las siguientes:

1. Estudiar el problema de la segmentación de la cartera en unidades de riesgo, cuyo número y definición, así como las reglas de asignación de los deudores a éstas, pueden tener un impacto significativo en las métricas de riesgo y en otras aplicaciones del modelo de pérdida. La segmentación permite, incluso, cierto arbitraje en la cifra de capital, como apunta [32]. [82] estudia el problema desde la aproximación estática, que, no obstante, no ha sido tratado aún en términos de la aproximación dinámica.
2. Comprender los determinantes de la estabilidad de solvencia condicional, es decir, las razones que pueden llevar a una entidad a disfrutar de una menor variabilidad en sus niveles de cobertura condicional que otra entidad que cuente con su mismo nivel de cobertura incondicional. Entender este fenómeno permitiría diseñar políticas dentro de la entidad destinadas a incrementar dicha estabilidad.
3. Estudiar y plantear soluciones al comportamiento en espiral que se puede producir cuando el mercado cuestiona la solvencia de una entidad por su cobertura condicional en un periodo de stress, pese a que su cobertura incondicional sea elevada, lo que puede dificultar la recapitalización de la entidad y con ello sembrar mayores dudas acerca de su solvencia en el corto plazo.
4. Considerar la viabilidad de un sistema de recursos propios variables en el tiempo que se sustente, en vez de en el capital incondicional, en las cifras de capital condicional. Para ello, sería necesario mitigar el coste de ajustar la estructura de capital periódicamente, lo que podría lograrse mediante la consideración de un fondo de reserva, *buffer*, anticíclico.

5. Analizar el fenómeno de la diversificación (el ahorro de capital que se produce al repartir la exposición crediticia total entre distintos productos, sectores de actividad o áreas geográficas) desde una perspectiva sistémica. Es decir, analizar el efecto para el agregado del sistema de las políticas que siguen las entidades con el objetivo de incrementar su diversificación, así como las interacciones entre dichas políticas, asumiendo que los productos, sectores de actividad o zonas geográficas sobre las que actúan son comunes para todo el sistema financiero.

Apéndice A

Tratamiento del riesgo específico

A.1. Introducción

En este Apéndice se revisan brevemente dos metodologías existentes para abordar el riesgo específico en la distribución de pérdidas, la Aproximación Normal y la Aproximación Mixta. Ambas se presentan desde la perspectiva de la simulación Monte Carlo del riesgo específico a nivel unidad, si bien pueden emplearse también para obtener soluciones analíticas, en línea con las aproximaciones citadas en el apartado 2.3.3. En un plano más general, [119], [91] y [75] discuten distintos aspectos del riesgo específico y su papel en el proceso de cálculo.

El objetivo es simular un valor de la variable:

$$L^{pd} = L / [F = pd] = \sum_{i=1}^M I^{i,pd} e^i = \sum_{i=1}^M Ber^i(pd) e^i \quad (A.1)$$

donde pd es una realización de F y por tanto todas las variables indicadoras de incumplimiento, $I^{i,pd} = Ber^i(pd)$, son independientes.

Como se expuso en el apartado 2.3.3, la aproximación básica para simular un valor de L^{pd} consiste en generar M variables independientes Bernoulli de parámetro pd , multiplicar cada una de ellas por la correspondiente exposición efectiva, e^i , y sumar el resultado obtenido para cada deudor a lo largo del índice i . Puesto que este proceso debe repetirse para cada realización de F , el coste computacional de la simulación total se eleva considerablemente, dificultando por ello el cálculo de las métricas de riesgo.

A.2. Aproximación Normal

La Aproximación Normal se sustenta en la versión generalizada del Teorema Central del Límite, según la cual la suma de variables aleatorias independientes también converge a una Normal aún cuando dichas variables no sean idénticamente distribuidas. El Teorema de Berry-Esseen y sus extensiones¹ definen esta generalización y ofrecen además una cota de convergencia.

La aproximación consiste en ajustar una distribución Normal a L^{pd} , \hat{L}^{pd} , y simular valores de pérdida a través de ella en vez de simular valores de la propia L^{pd} . Ello permite reducir la simulación condicional a la generación de un único valor, el de la distribución Normal ajustada, \hat{L}^{pd} , en vez de M , uno por cada variable $Ber^i(pd)$.

El ajuste de la distribución Normal \hat{L}^{pd} es inmediato a partir de los momentos de L^{pd} :

$$E[L^{pd}] = pd \sum_{i=1}^M e^i \quad (\text{A.2})$$

$$V[L^{pd}] = pd(1 - pd) \sum_{i=1}^M (e^i)^2 \quad (\text{A.3})$$

Este método es sencillo de implementar y ofrece una significativa reducción del coste computacional. No obstante, la calidad de la aproximación no siempre es satisfactoria. Por un lado, M puede ser insuficientemente alto aún cuando la exposición efectiva sea igual para todos los deudores. Por otro, la uniformidad en las exposiciones efectivas no es el caso general, por lo que habitualmente la concentración nominal distorsionará la distribución L^{pd} y la alejará de la normalidad aún cuando M sea elevado.

Ello conduce a que, en términos prácticos, el uso de la Aproximación Normal se restrinja a aquellas unidades en las que se combine un valor de M grande y un nivel de concentración reducido². Es decir, la Aproximación Normal resulta adecuada sólo en unidades ligeramente alejadas de la infinita granularidad.

Por último, cabe señalar que en algunos trabajos, sobre todo para valores de M pequeños y valores de exposición efectiva similares, la distribución que se emplea como aproximación es la Poisson³ en vez de la Normal. En tal caso el planteamiento es el mismo que el expuesto en este apartado, en el sentido de sustituir L^{pd} por otra distribución alternativa, \hat{L}^{pd} , en esta ocasión Poisson, con el fin de reducir la carga computacional de la simulación.

¹ Véase [69] para una revisión de estos desarrollos y su aplicación al cálculo de la pérdida por riesgo de incumplimiento.

² El índice de Herfindahl–Hirschman (*HHI index*, [119]) se emplea en la práctica como medida de concentración nominal.

³ Es el caso de *CreditRisk+*. [160] ofrece una discusión general sobre la bondad de ajuste, el proceso de simulación y las ventajas analíticas de la distribución de Poisson en el marco de independencia condicional.

A.3. Aproximación Mixta

La Aproximación Mixta supone una modificación de la Aproximación Normal para paliar su imprecisión en el caso de concentración nominal⁴. El método se sustenta en la idea de que, en la práctica, la concentración nominal suele provenir de un número reducido de deudores tales que, de eliminarse de la unidad, permitirían emplear una aproximación Normal.

La idea anterior da lugar a la división de los M deudores de la unidad en dos grupos, \mathcal{M}^1 y \mathcal{M}^2 , de M^1 y M^2 deudores, con $M = M^1 + M^2$. Se asume que \mathcal{M}^1 agrupa a aquellos deudores con mayor exposición efectiva en términos relativos, mientras que en \mathcal{M}^2 quedan los restantes deudores de la unidad, para los que se asume suficiente granularidad, de forma que admiten una Aproximación Normal.

Se definen entonces $L^{pd,1}$ y $L^{pd,2}$ como:

$$\begin{aligned} L^{pd,1} &= \sum_{i \in \mathcal{M}^1} Ber^i(pd) e^i \\ L^{pd,2} &= \sum_{i \in \mathcal{M}^2} Ber^i(pd) e^i \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $L^{pd} = L^{pd,1} + L^{pd,2}$.

Puesto que $L^{pd,1}$ y $L^{pd,2}$ son independientes, es posible simular un valor de L^{pd} como la suma de un valor simulado de $L^{pd,1}$ y otro de $L^{pd,2}$, generados por separado. De esta forma, la Aproximación Mixta consiste en:

1. Determinar los grupos de deudores \mathcal{M}^1 y \mathcal{M}^2 , con M^1 y M^2 deudores respectivamente.
2. Simular M^1 variables de incumplimiento para obtener un valor de $L^{pd,1}$, $l^{pd,1}$.
3. Simular un valor de la Aproximación Normal $\hat{L}^{pd,2}$ para obtener un valor correspondiente a $L^{pd,2}$, $l^{pd,2}$.
4. Finalmente, obtener un valor de L^{pd} como suma de los dos valores simulados anteriores, $l^{pd} = l^{pd,1} + l^{pd,2}$.

Esta aproximación permite reducir el número de simulaciones necesarias para obtener un valor de L^{pd} de M a M^1+1 . Obviamente, cuanto menor es el grupo formado por los deudores que originan la concentración, mayor es el ahorro en coste computacional. El problema radica entonces en seleccionar el grupo de deudores que forma \mathcal{M}^1 sin incurrir

⁴ [62] propone esta aproximación bajo la denominación de *semi-asumptotic approach*. En dicho trabajo se presenta en el contexto de una solución analítica al VaR, lo que supone una visión complementaria a la expuesta en este Apéndice en términos de simulación del riesgo específico. [119] ofrece un análisis comparativo con otros enfoques analíticos.

en un coste de análisis mayor que el que se desea reducir. Esta selección supone un compromiso entre precisión, alto M^1 , y ahorro de coste computacional, bajo M^1 .

La Aproximación Mixta supone una mejora con respecto a la Aproximación Normal y resulta útil en aquellas unidades donde la concentración proviene de deudores fácilmente identificables. No obstante, requiere la implementación de un método de selección apropiado y, en el caso en que el grupo \mathcal{M}^1 deba contar con muchos deudores para lograr normalidad en $L^{pd,2}$, su eficacia se ve reducida notablemente.

Apéndice B

Metodologías de reparto del capital

B.1. Introducción

El reparto del capital ha generado un gran interés en la literatura. [22], [47] y [51], entre otros, ofrecen una visión general del problema, su relación con el cálculo de las cifras de capital *no diversificadas* y algunos ejercicios empíricos, mientras que [87] discute la relación entre los capitales individual, diversificado e incremental¹, [150] plantea el problema en términos de asignación óptima y [49] lo formula desde la teoría de juegos. Otros muchos trabajos aplicados presentan ejercicios empíricos sobre carteras sintéticas o discuten la integración en la gestión de las métricas de riesgo diversificadas. En este Apéndice se revisan brevemente los fundamentos del proceso, incluidas dos metodologías de reparto empleadas frecuentemente.

B.2. Fundamentos del proceso de reparto del capital

El objetivo del reparto de capital es obtener para cada unidad de riesgo de la cartera una cifra de capital diversificado, $k^{d,j}$. Dicha métrica complementa al capital individual, k , que también es una medida de riesgo propia de la unidad pero que no recoge el efecto diversificación que se origina al considerar una medición del riesgo

¹ El capital incremental de una unidad de riesgo viene dado por la diferencia entre el capital agregado de toda la cartera y el capital agregado de toda la cartera tras excluir dicha unidad de la misma.

conjunta para el vector² $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$. Es decir, el hecho de que³:

$$\tilde{k} = \tilde{\eta} - \tilde{\mu} < \sum_{j=1}^N k^j = \sum_{j=1}^N \eta^j - \mu^j \quad (\text{B.1})$$

Puesto que la pérdida esperada es lineal:

$$\tilde{\mu} = \sum_{j=1}^N \mu^j \quad (\text{B.2})$$

el efecto diversificación se origina en el VaR:

$$\tilde{\eta} < \sum_{j=1}^N \eta^j \quad (\text{B.3})$$

El VaR diversificado, $\eta^{d,j}$, $j = 1, \dots, N$, cumple entonces:

$$\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^N \eta^{d,j} \quad (\text{B.4})$$

Es decir, el VaR diversificado es una cifra de VaR individual cuya suma a lo largo de todas las unidades de la cartera es igual al VaR agregado.

El reparto del VaR agregado se representa entonces como un vector $\mathbf{r} = (r^1, \dots, r^N)$, con $r^j = \eta^{d,j}/\tilde{\eta}$ y $\sum_{j=1}^N r^j = 1$. Esto induce un esquema de pesos para el reparto del capital agregado dado por $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}^1, \dots, \hat{r}^N)$, siendo:

$$\hat{r}^j = \frac{r^j \tilde{\eta} - \mu^j}{k^j} \quad (\text{B.5})$$

con $k^{d,j} = \hat{r}^j k$ el capital diversificado de la unidad j .

Cabe señalar que, a diferencia de μ^j , η^j y k^j , $k^{d,j}$ no depende exclusivamente de L^j , sino de todo el vector de distribuciones de pérdida marginales $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$.

Para la medición del beneficio de la diversificación se emplea el denominado *ratio*

² La discusión puede generalizarse a cualquier grupo de unidades subsumido en la cartera, sin necesidad de que sea el total. No obstante, por simplicidad, la exposición se plantea en términos totales: asignación del capital agregado de toda la cartera entre las unidades que la forman.

³ Como se apuntó en el apartado 2.2, el VaR no es una medida de riesgo coherente precisamente porque este principio no se cumple siempre. No obstante, y dado que sí se verifica empíricamente en la práctica, a lo largo de este Apéndice se asume una cartera que cumple la ecuación (B.1). En todo caso, esta hipótesis no es imprescindible para poder repartir el capital agregado entre las unidades de riesgo.

de diversificación, que viene dado, para cada unidad, por⁴:

$$\lambda^j = 1 - \frac{k^{d,j}}{k^j} \quad (\text{B.6})$$

siendo $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^N)$ el vector de ratios de diversificación. El ratio de diversificación agregado viene dado por:

$$\tilde{\lambda} = 1 - \frac{\tilde{k}}{\sum_{j=1}^N k^j} \quad (\text{B.7})$$

Cuanto mayor es el ratio de diversificación mayor es el ahorro de capital que obtiene la unidad/cartera gracias al efecto diversificación. La Figura B.1 esquematiza el proceso.

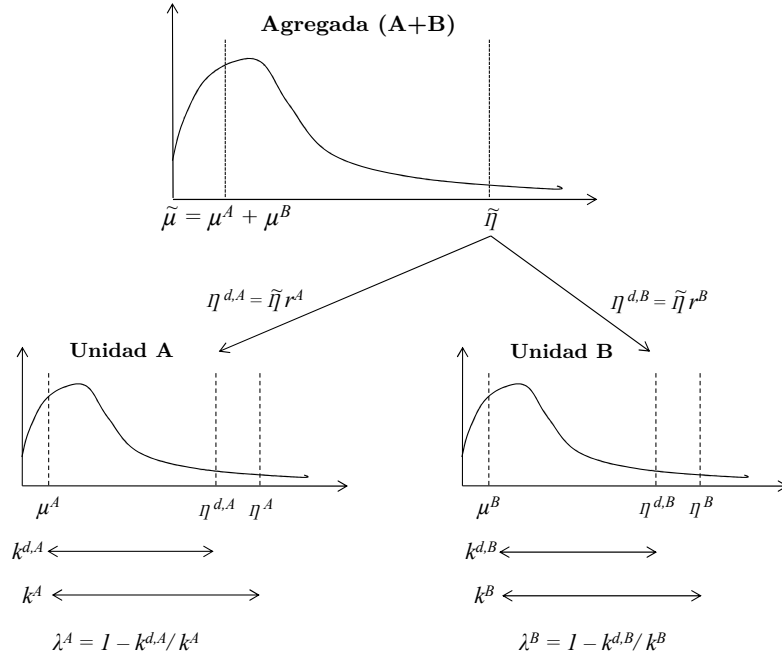


Figura B.1: Diagrama del proceso de reparto del capital.

De lo anterior se deduce que (i) $\hat{\mathbf{r}}$ determina $\boldsymbol{\lambda}$, y (ii) dada la linealidad de la pérdida esperada, \mathbf{r} determina $\hat{\mathbf{r}}$ y las metodologías de reparto del capital agregado, \tilde{k} , lo son de hecho del VaR agregado, $\tilde{\eta}$.

La elección de un método de reparto del VaR agregado conlleva cierto grado de arbitrariedad. Ello ha motivado la aparición en la literatura de “criterios de admisibilidad” similares a los propuestos para determinar las medidas de riesgo coherentes. [49] y [102] discuten y proponen propiedades deseables, que según muestra [153] pueden resumirse en dos:

- Asignación completa del capital, según la cual debe cumplirse que:

⁴ En algunos trabajos el ratio de diversificación se expresa, de forma equivalente, como $\lambda^j = k^{d,j}/k^j$.

$$\tilde{k} = \sum_{j=1}^N k^{d,j} \quad (\text{B.8})$$

- Beneficio solidario de la diversificación, según la cual debe cumplirse que:

$$k^{d,j} < k^j \quad (\text{B.9})$$

La condición (C.8) formaliza la propia definición y la (C.9) exige que todas las unidades tengan un ratio de diversificación mayor que 0. Como señala [153], sólo el denominado *método de Euler* cumple con ambas condiciones. Este método parte del hecho de que el VaR es una función homogénea de grado 1 con respecto a la exposición efectiva agregada, $E^j = \sum_{i=1}^{M^j} e^{ij}$, de cada unidad de riesgo. Esto es, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)$, y se cumple que:

$$\tilde{\eta}(xE^1, \dots, xE^j, \dots, xE^N) = x\tilde{\eta}(E^1, \dots, E^j, \dots, E^N) \quad (\text{B.10})$$

con $x \in \mathbb{R}^+$. Por ello, se cumple el Teorema de Euler para funciones homogéneas:

$$\tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N) = \frac{\partial \tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)}{\partial E^1} E^1 + \dots + \frac{\partial \tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)}{\partial E^N} E^N \quad (\text{B.11})$$

de forma que:

$$\eta^{d,j} = \frac{\partial \tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)}{\partial E^j} E^j \quad (\text{B.12})$$

Pese a su respaldo teórico, esta metodología de reparto cuenta con dos inconvenientes. Por un lado, exige el cálculo de N derivadas, lo que complica su implementación. Por otro, en el caso de que L sea una variable aleatoria discreta, como en el modelo de pérdida considerado en este trabajo, $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)$ no es una función continua en todo punto.

Algunos trabajos han intentado mitigar estas debilidades. Así, por ejemplo, [153] plantea técnicas de regularización con el fin de calcular las derivadas de $\tilde{\eta}(E^1, \dots, E^N)$ en todo punto. No obstante, la alternativa preponderante al reparto de Euler consiste en tomar como VaR diversificado el dado por:

$$\eta^{d,j} = E \left[L^j / \tilde{L} = \tilde{\eta} \right] \quad (\text{B.13})$$

cumpléndose que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \eta^{d,j} &= \sum_{j=1}^N E \left[L^j / \tilde{L} = \tilde{\eta} \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^N L^j / \tilde{L} = \tilde{\eta} \right] \\ &= E \left[\tilde{L} / \tilde{L} = \tilde{\eta} \right] \\ &= \tilde{\eta} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Esta formulación cuenta con algunas ventajas deseables: (i) puede definirse para cualquier distribución multivariante $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$, con $\tilde{L} = \sum_{j=1}^N L^j$, (ii) resulta intuitiva, y (iii) como señala [153], equivale al método de Euler en el caso de normalidad multivariante del vector \mathbf{L} .

Sin embargo, la expresión (B.13) no admite, en general, una solución analítica sencilla y su estimación por simulación Monte Carlo puede conllevar un coste computacional muy elevado para ser precisa⁵. Ello ha motivado la aparición en la literatura de diversas aproximaciones que modifican la expresión (B.13) o añaden hipótesis adicionales para facilitar su cálculo, entre las que se encuentran el método de reparto por *Varianzas – Covarianzas* (VC) y el método de reparto por *Expected Shortfall* (ES), ambos empleados en los ejercicios empíricos del apartado 7.5. [72] repasa otras alternativas. Cabe señalar, como muestra [163], que las entidades emplean el capital diversificado en políticas internas sensibles, como la retributiva, por lo que también consideran criterios de estabilidad, sencillez e intuitividad en el diseño de sus metodologías de reparto.

B.3. Método de reparto por Varianzas – Covarianzas

El método de reparto por Varianzas – Covarianzas (VC) parte de una aproximación lineal de la forma $L^j = a^j + b^j \tilde{L} + \varepsilon^j$, con $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N)$ distribuido según una Normal multivariante con vector de medias $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Por tanto, $E[L^j / \tilde{L} = \tilde{\eta}] = a^j + b^j \tilde{\eta}$ y sustituyendo a^j y b^j por sus estimadores MCO,

$$\hat{a}^j = \mu^j - \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tilde{\mu} \quad (\text{B.15})$$

y

$$\hat{b}^j = \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \quad (\text{B.16})$$

⁵ Puesto que sería necesario obtener una muestra de valores estimados de VaR agregado, cada uno de ellos requiriendo su propia simulación Monte Carlo.

se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\eta^{d,j} &= \mu^j - \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tilde{\mu} + \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tilde{\eta} \\
&= \mu^j + \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} (\tilde{\eta} - \tilde{\mu}) \\
&= \mu^j + \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tilde{k}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

de donde:

$$k^{d,j} = \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tilde{k} \tag{B.18}$$

y en consecuencia:

$$\hat{r}^j = \frac{\text{Cov}[L^j, \tilde{L}]}{V[\tilde{L}]} \tag{B.19}$$

Esta metodología es exacta cuando $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$ es Normal multivariante, si bien es aplicable sobre cualquier otra distribución con momentos de segundo orden finitos. En tal caso, pueden obtenerse repartos inadecuados si \mathbf{L} o \tilde{L} se alejan de la regularidad. Una extensión en la que se incluyen términos cuadráticos en el modelo lineal puede encontrarse en [153].

B.4. Método de reparto por Expected Shortfall

El método de reparto por Expected Shortfall (ES) parte de la generalización de la definición de $\eta^{d,j}$, $\eta^{d,j} = E[L^j/\tilde{L} = \tilde{\eta}]$, para un conjunto Γ cualquiera contenido en el soporte de \tilde{L} , $\Gamma \subset S^{\tilde{L}} \subset \mathbb{R}^+$, de manera que $\eta_{\Gamma}^{d,j}$ se define como:

$$\eta_{\Gamma}^{d,j} = \tilde{\eta} \frac{E[L^j/\tilde{L} \in \Gamma]}{E[\tilde{L}/\tilde{L} \in \Gamma]} \tag{B.20}$$

Lo que supone tomar $E \left[L^j / \tilde{L} \in \Gamma \right]$ en vez de $E \left[L^j / \tilde{L} = \tilde{\eta} \right]$ y normalizar la expresión para cumplir la primera condición de admisibilidad, puesto que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \eta_{\Gamma}^{d,j} &= \sum_{j=1}^N \tilde{\eta} \frac{E \left[L^j / \tilde{L} \in \Gamma \right]}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]} \\
&= \frac{\tilde{\eta}}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]} \sum_{j=1}^N E \left[L^j / \tilde{L} \in \Gamma \right] \\
&= \frac{\tilde{\eta}}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]} E \left[\sum_{j=1}^N L^j / \tilde{L} \in \Gamma \right] \\
&= \frac{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]} \tilde{\eta} \\
&= \tilde{\eta}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

De esta forma, los pesos del reparto del VaR vienen dados por

$$r^j = \frac{E \left[L^j / \tilde{L} \in \Gamma \right]}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} \in \Gamma \right]} \tag{B.22}$$

y la definición (B.13) es entonces un caso particular de ésta cuando $\Gamma = \{\eta\}$.

El método ES supone considerar $\Gamma = \left\{ l \in S^{\tilde{L}} / l > \tilde{\eta} \right\}$, por lo que⁶:

$$r^j = \frac{E \left[L^j / \tilde{L} > \tilde{\eta} \right]}{E \left[\tilde{L} / \tilde{L} > \tilde{\eta} \right]} \tag{B.23}$$

La expresión anterior no es compleja de estimar a partir de una muestra de $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$, si bien puede ser necesario un tamaño elevado para lograr una estimación robusta, dado que se trata de una media de valores en la cola de la distribución. La extensión natural del reparto ES es el reparto bajo medidas espectrales, propuestas por [1], en las que se considera una media ponderada, en vez de simple, de los valores que exceden el percentil de interés.

⁶ Como se señaló en el apartado 2.2, el ES se puede calcular para un percentil η_v cualquiera, con v no necesariamente igual a u , si bien tomar $v = u$ resulta la opción natural. Esta elección es también la empleada en los ejercicios empíricos del apartado 7.5.

Apéndice C

Herramientas estadísticas

C.1. Introducción

En este Apéndice se revisan tres herramientas estadísticas avanzadas consideradas en los capítulos precedentes: el modelo de función índice, el modelo factorial dinámico y la técnica de reducción de la varianza Importance Sampling. En los tres casos la discusión se ciñe a las consideraciones de interés para este trabajo.

C.2. Modelo de función índice

El modelo de función índice se enmarca en la modelización de fenómenos representados por variables cualitativas, *qualitative response models*, tratados, por ejemplo, en [7], y parte de la consideración de un evento dicotómico estocástico en el periodo t , $I_t \in \{1, 0\}$, y un conjunto de M copias del mismo, I_t^1, \dots, I_t^M , de forma que la tasa de acierto en el periodo, la esperanza de las variables I_t^i , se expresa como función de un grupo de variables exógenas.

La interpretación del modelo depende de cada contexto, pero, en general, supone vincular cada evento dicotómico a un individuo, de forma que la tasa de acierto representa la incidencia del evento en la población. Dicha incidencia se ve afectada por las variables explicativas empleadas en el modelo.

Formalmente, se asume que:

$$I_t^i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_t^i - \mu_t < 0 \\ 0 & \text{si } e_t^i - \mu_t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

donde $\mu_t \in \mathbb{R}$ y las variables e_t^i tienen media 0, son mutua y serialmente independientes

e idénticamente distribuidas con función de distribución Normal estándar, por lo que:

$$P(I^i = 1) = P(e_t^i - \mu_t < 0) = P(e_t^i < \mu_t) = N(\mu_t) \quad (C.2)$$

siendo $N(\cdot)$ es la función de distribución de la Normal estándar, lo que da lugar a una función índice, o función de enlace, probit¹.

Por la independencia de las variables e_t^i , las variables I^i son independientes dado μ_t y la tasa de acierto en las M copias, h_t , viene dada por:

$$h_t = N(\mu_t) + a_t \quad (C.3)$$

Donde a_t es el *error de realización*, para el que se cumple que:

$$\begin{aligned} E[a_t] &= 0 \\ V[a_t] &= \frac{N(\mu_t)(1 - N(\mu_t))}{M} \end{aligned} \quad (C.4)$$

a_t converge, cuando $M \rightarrow \infty$, en distribución a la Normal, por el Teorema Central del Límite, y en probabilidad a la variable degenerada 0, por el decaimiento de la varianza, esto es:

$$\begin{aligned} a_t &\xrightarrow{D} N(0, V[a_t]) \\ a_t &\xrightarrow{P} 0 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Propiedades similares se pueden derivar para h_t :

$$\begin{aligned} E[h_t] &= N(\mu_t) \\ V[h_t] &= \frac{N(\mu_t)(1 - N(\mu_t))}{M} \end{aligned} \quad (C.6)$$

con:

$$\begin{aligned} h_t &\xrightarrow{D} N(N(\mu_t), V[a_t]) \\ h_t &\xrightarrow{P} N(\mu_t) \end{aligned} \quad (C.7)$$

Cuando M es suficientemente grande, $N^{-1}(h_t)$ puede aproximarse por un polinomio de Taylor de primer orden en el entorno de $a_t = 0$, de forma que:

$$x_t = N^{-1}(h_t) = N^{-1}(N(\mu_t) + a_t) \approx \mu_t + \frac{a_t}{n(\mu_t)} \quad (C.8)$$

siendo $n(\cdot)$ es la función de densidad de la Normal estándar.

La expresión (C.8) permite establecer un modelo de regresión lineal para la tasa de acierto. Si μ_t se expresa en términos de K variables explicativas y un término de error,

¹ Otro caso de interés, con un desarrollo equivalente al aquí presentado para el caso probit, se da cuando e_t^i sigue una distribución logística, en cuyo caso se obtiene la función índice logística.

$\mu_t = \beta^0 + \beta^1 z_t^1 + \dots + \beta^K z_t^K + u_t$, entonces puede plantearse el siguiente modelo para x_t :

$$x_t = \beta^0 + \beta^1 z_t^1 + \dots + \beta^K z_t^K + u_t + \frac{a_t}{n(\beta^0 + \beta^1 z_t^1 + \dots + \beta^K z_t^K + u_t)} \quad (\text{C.9})$$

donde $x_t = N^{-1}(h_t)$ y z_t^1, \dots, z_t^K son series observadas. Esta expresión, fuertemente no lineal, puede simplificarse² para obtener:

$$x_t = \beta^0 + \beta^1 z_t^1 + \dots + \beta^K z_t^K + u_t + a_t^* \quad (\text{C.10})$$

siendo a_t^* un término de error de media 0 y varianza aproximada:

$$V[a_t^*] \approx V[u_t] + \frac{N(h_t)(1 - N(h_t))}{Mn(N^{-1}(h_t))^2} \quad (\text{C.11})$$

Esta expresión indica que el término de error puede dividirse en un componente sistémico, común a todos los individuos de la población, y otro idiosincrásico, proveniente del error de realización y que desaparece al incrementar M . Si u_t tiene varianza constante, la única fuente de heterocedasticidad es el error de realización a_t^* .

De esta forma, el modelo para la tasa de acierto, h_t , queda:

$$\begin{aligned} x_t &= \beta^0 + \beta^1 z_t^1 + \dots + \beta^K z_t^K + v_t \\ h_t &= N(x_t) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

donde $v_t = u_t + a_t^*$ y se cumple que $H_{s/t} = N(X_{s/t})$, siendo $X_{s/t}$ la distribución condicional en $t + s$ de x_t dada la información disponible en t .

Por último, cabe señalar dos cuestiones.

Primera, un desarrollo equivalente se obtiene si el número de individuos de la población varía con el tiempo, $M = M_t$, lo que implica una fuente de heterocedasticidad adicional. Además, la dinámica para x_t puede generalizarse más allá de la regresión estática así como para el caso multivariante.

Segunda, en el caso del riesgo de incumplimiento, el propio modelo de Vasicek admite una interpretación en términos del modelo de función índice, con I_t representando el indicador de incumplimiento de una empresa y $e_t^i - \mu_t$ el valor de su patrimonio neto, con $e_t^i = \sqrt{\rho}z_t + \sqrt{1-\rho}e_t^{*i}$, $0 < \rho < 1$, y siendo $z_t \sim N(0, 1)$ y $e_t^{*i} \sim N(0, 1)$ independientes entre sí.

La empresa incumple entonces si el patrimonio neto cae por debajo de cero, es decir, $I_t^i = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\rho}z_t + \sqrt{1-\rho}e_t^{*i} < \mu_t \Leftrightarrow N(e_t^{*i}) = u_t^i < N\left(\frac{\mu_t - \sqrt{\rho}z_t}{\sqrt{1-\rho}}\right)$, con u_t^i distribuido uniformemente en $(0, 1)$. Esta es la expresión que da lugar a la distribución de Vasicek, con $N(\mu_t) = \alpha_t = \alpha$.

² Sustituyendo μ_t por el estimador $N^{-1}(h_t)$.

C.3. Modelo factorial dinámico

El modelo factorial dinámico extiende al ámbito de las series temporales la estructura factorial inicialmente desarrollada en el marco estático. En su formulación estándar, [129], el modelo factorial dinámico permite expresar la dinámica de un vector de N series temporales observables, $\mathbf{y}_t = (y_t^1, \dots, y_t^N)$, a partir de un vector de $N^* \ll N$ factores latentes, $\mathbf{f}_t = (f_t^1, \dots, f_t^{N^*})$, adoptando la siguiente expresión lineal de coeficientes fijos:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{P} \mathbf{f}_t + \mathbf{e}_t \quad (\text{C.13})$$

Donde el vector de innovaciones \mathbf{e}_t , de dimensión N , se distribuye normalmente con matriz de covarianzas Σ^e . Los factores latentes, que no son observables, siguen una dinámica lineal de la forma:

$$\Phi(\mathbf{B}) \mathbf{f}_t = \mathbf{d} + \Theta(\mathbf{B}) \mathbf{a}_t \quad (\text{C.14})$$

donde \mathbf{a}_t es el vector de innovaciones, de dimensión N^* , con distribución normal multivariante y matriz de covarianzas Σ^a . \mathbf{d} es un vector de constantes y $\Phi(\mathbf{B})$ y $\Theta(\mathbf{B})$ son los polinomios de retardos en \mathbf{f}_t y \mathbf{a}_t , respectivamente.

Los factores \mathbf{f}_t pueden ser estacionarios o integrados en función de las raíces de $|\Phi(\mathbf{B})| = 0$, como discute [130], y un caso de especial importancia se da cuando las series presentan cointegración de primer orden y rango r , en cuyo caso \mathbf{y}_t admite una representación como modelo dinámico factorial con r factores latentes integrados. Cuando $N^* = 1$ se obtiene un modelo unifactorial, de gran relevancia práctica, puesto que en caso de cointegración permite capturar la raíz unitaria común a todas las series y_t^j en el factor latente, reduciendo así la parametrización de la dinámica.

Cabe señalar dos puntos sobre esta formulación.

Por un lado, los problemas de elección del número de factores latentes que gobiernan el modelo, identificación de los parámetros del mismo y filtrado de los factores \mathbf{f}_t suelen abordarse a través de la formulación en espacio de los estados y se relacionan con los problemas de determinación del orden del vector de estado, estimación de las matrices del sistema y suavizado del vector de estado.

Por otro lado, la formulación anterior puede generalizarse para dotar a las innovaciones \mathbf{e}_t de estructura dinámica propia, como sucede en el modelo unifactorial empleado en este trabajo. En tal caso, cada serie y_t^j se representa como suma de un componente latente, que depende de los factores comunes \mathbf{f}_t , y otro específico, propio de cada serie.

C.4. Importance Sampling

El Muestreo por Importancia (*Importance Sampling*, IS) es la técnica de reducción de la varianza en la que se sustentan los esquemas de simulación eficiente propuestos

en el Capítulo 6. Una discusión más detallada que la que aquí se presenta puede encontrarse [75], [76] y [125], entre otros muchos. La última referencia ofrece además una visión complementaria a la considerada en el Capítulo 6, puesto que aplica el IS al proceso de reparto del capital en vez de al de su estimación.

Sea X una variable aleatoria, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) . Sea f su función de densidad, continua por el momento, y sean $l \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$ cumpliendo:

$$p = P(X > l) \quad (\text{C.15})$$

Asociada a X se define la variable dicotómica K como:

$$K = K(X) = \begin{cases} 1 & X > l \\ 0 & X \leq l \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

Puesto que $E[K] = p$, p puede obtenerse resolviendo la integral:

$$p = E[K] = \int k(x) f(x) dx \quad (\text{C.17})$$

donde $k(x) = 0$ si $x \leq l$ y $k(x) = 1$ si $x > l$.

En algunos casos la expresión (C.17) no admite una solución analítica. Puede optarse entonces por la simulación de Monte Carlo para la estimación de p . En tal caso, el procedimiento consiste en generar una muestra de tamaño G de valores de X , $\{x^1, \dots, x^G\}$, y tomar como estimador de p , \hat{p} , la media de dicha muestra:

$$\hat{p} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G k(x^i) \quad (\text{C.18})$$

El IS consiste entonces en sustituir la densidad poblacional f por otra densidad, f^* , de forma que el estimador de p bajo ésta, \hat{p}^* , sea más eficiente que \hat{p} y continúe siendo insesgado. Puesto que sustituir f por f^* supone un cambio de medida en el espacio de probabilidad de X , es necesario incorporar una corrección que garantice la insesgadez.

De esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned} p &= E[K] \\ &= \int k(x) f(x) dx \\ &= \int k(x) f(x) \frac{f^*(x)}{f^*(x)} dx \\ &= \int k(x) f^*(x) \frac{f(x)}{f^*(x)} dx \\ &= \int k(x) f^*(x) \delta(x) dx \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

siendo f^* la nueva medida, denotada habitualmente como *función de muestreo*, mientras que δ se denomina comúnmente como *función de corrección*. La función δ modifica

el peso de cada observación en el estimador, de forma que éste se convierte en una media ponderada, en vez de simple, de la muestra generada. Así, \hat{p}^* viene dado por:

$$\hat{p}^* = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G k(x^i) \delta(x^i) = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G k^i \delta^i \quad (\text{C.20})$$

donde los coeficientes δ^i , $i = 1, \dots, G$, son los coeficientes, o factores, de corrección.

Por tanto, definir un esquema IS consiste en escoger adecuadamente una medida alternativa f^* con el fin de minimizar la varianza de \hat{p}^* . Esta elección aúna, como señala [75], ciencia e intuición. En la literatura pueden encontrarse algunas formulaciones generales, como la de escalado:

$$f^*(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.21})$$

o la de traslación:

$$f^*(x) = f(x - a) \quad (\text{C.22})$$

No obstante, no existe una metodología universal para la elección de la función de muestreo y su definición depende del problema subyacente. Cabe señalar, de hecho, que una mala elección de f^* puede incrementar, en lugar de reducir, la varianza del estimador alternativo, \hat{p}^* .

La aplicación del IS al caso de variables aleatorias discretas es inmediata³. Si X es una variable aleatoria multinomial de dimensión M que toma los valores $\{x_1, \dots, x_M\}$ según una medida de probabilidad $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)$, con $0 \leq v_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^M v_i = 1$, entonces la función de muestreo viene dada por una medida de probabilidad alternativa, $\mathbf{v}^* = (v_1^*, \dots, v_M^*)$, y un vector de factores de corrección $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_M)$, con $\delta_i = v_i/v_i^*$.

Por último, cabe señalar que existe, como muestra [76], una relación notable entre el IS sobre variables discretas y el muestreo estratificado (*Stratified Sampling*, SS). Éste último consiste en muestrear G valores de una población estructurada en M estratos con el fin de estimar algún parámetro poblacional. El interés radica entonces en distribuir adecuadamente los G valores entre los M estratos con el fin de reducir la varianza del estimador, distribución que puede no coincidir con la que se corresponde con un muestreo aleatorio simple. En términos de IS, el SS puede entenderse como un cambio de medida en la variable multinomial que indica, en cada realización, el estrato sobre el que muestrear.

³ Aunque en este Apéndice se discute solamente el caso de soporte finito, el IS puede aplicarse también, de forma similar, sobre una variable discreta con soporte en un número infinito numerable de valores.

Tabla de símbolos

A continuación se exponen los principales símbolos y acrónimos empleados a lo largo de este trabajo. No se incluyen índices, marcas ni notación vectorial, que, en los casos en los que aplican, pueden derivarse de forma inmediata. Así, por ejemplo, L , que indica la distribución de pérdidas, puede presentarse en un contexto multivariante como L^j , siendo $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^N)$ el vector de distribuciones de pérdida de la cartera, mientras que \tilde{L} representa la distribución de pérdidas agregada. De forma similar, L_t , L_t^j , $\mathbf{L}_t = (L_t^1, \dots, L_t^N)$ y \tilde{L}_t representan las versiones condicionadas en t de las distribuciones anteriores.

Símbolo	Descripción
$E[\cdot]$	<i>Operador esperanza de una variable aleatoria.</i>
$V[\cdot]$	<i>Operador varianza de una variable aleatoria.</i>
$S[\cdot]$	<i>Operador desviación típica de una variable aleatoria.</i>
$Cov[\cdot, \cdot]$	<i>Operador covarianza de dos variables aleatorias.</i>
$Corr[\cdot, \cdot]$	<i>Operador correlación de dos variables aleatorias.</i>
$N(\cdot)$	<i>Función de distribución de la Normal estándar.</i>
HR	<i>Hazard rate (tasa de impago).</i>
PD	<i>Probability of default (probabilidad de incumplimiento).</i>
EAD	<i>Exposure at default (exposición en caso de incumplimiento).</i>
LGD	<i>Lost given default (tasa de no recuperación en caso de incumplimiento).</i>
\mathcal{F}	<i>Complementario a 1 de la función de supervivencia en tiempo discreto, $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_Q) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - x_s)$.</i>
$\tilde{\mathcal{F}}$	<i>Complementario a 1 de la función de supervivencia en tiempo discreto con función de enlace probit, $\tilde{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_Q) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(x_s))$.</i>
i	<i>Índice que recorre los deudores de la unidad de riesgo.</i>

Símbolo	Descripción
j	Índice que recorre las unidades de riesgo de la cartera.
s	Índice que recorre los periodos del horizonte de cálculo.
t	Índice que recorre los periodos temporales de la ventana de cálculo.
M	Número de deudores.
N	Número de unidades de riesgo.
Q	Número de periodos del horizonte de cálculo.
T	Número de periodos de la ventana de cálculo.
L	Distribución de pérdidas.
u	Nivel de cobertura para el cálculo de η .
α	Nivel de significación, $\alpha = 1 - u$.
μ	Pérdida esperada (media) de L , $\mu = E[L]$.
η	VaR (Value at risk, percentil) de L , $P(L < \eta) = u$.
η^d	VaR diversificado de L .
k	Capital (pérdida inesperada) de L , $k = \eta - \mu$.
k^d	Capital diversificado de L .
F	Distribución de PD en un modelo de independencia condicional.
ρ	Correlación de activos (intraunidad) inducida por la distribución de PD.
V	Distribución de PD de Vasicek.
h_t	HR (hazard rate) del periodo t , obtenido como el cociente entre el número de deudores que declaran un impago en t y el número total de deudores en riesgo en dicho periodo.
x_t	Transformación por la inversa de la función de distribución de la Normal estándar de h_t , $x_t = N^{-1}(h_t)$.
$X_{s/t}$	Distribución condicional de x_t en el periodo $t + s$ dada toda la información disponible hasta t , $t = 1, \dots, T$ y $s = 1, \dots, Q$.
$Y_{s/t}$	Transformación por la función de distribución de la Normal estándar de $X_{s/t}$, $Y_{s/t} = N(X_{s/t})$.
W_t	Distribución condicional de PD bajo el modelo propuesto, $W_t = \mathcal{F}(Y_{1/t}, \dots, Y_{Q/t}) = \tilde{\mathcal{F}}(X_{1/t}, \dots, X_{Q/t}) = 1 - \prod_{s=1}^Q (1 - N(X_{s/t}))$.
\mathcal{I}	Variable multinomial que toma el valor t , $t = 1, \dots, T$, con probabilidad $1/T$.

Símbolo	Descripción
Π	<i>Distribución de PD propuesta en el Capítulo 3, $\Pi = W_t \circ \mathcal{I}$. Es decir, la mixtura uniforme de las distribuciones condicionales W_t.</i>
v_t^*	<i>Pesos del esquema de simulación sobre la dimensión temporal propuesto en el Capítulo 6, $t = 1, \dots, T$.</i>
δ_t	<i>Factores de corrección del esquema de simulación sobre la dimensión temporal propuesto en el Capítulo 6, $t = 1, \dots, T$.</i>
v_t^{*b}	<i>Pesos del esquema de simulación extendido propuesto en el Capítulo 6, $t = 1, \dots, T$ y $b = 1, \dots, 2^Q$.</i>
δ_t^b	<i>Factores de corrección del esquema de simulación extendido propuesto en el Capítulo 6, $t = 1, \dots, T$ y $b = 1, \dots, 2^Q$.</i>
Π^*	<i>Distribución de PD propuesta con vector de mixtura dado por alguno de los dos esquemas de simulación eficiente planteados en el Capítulo 6.</i>
r	<i>Peso del reparto del VaR agregado, $r = \eta^d / \tilde{\eta}$, siendo $\tilde{\eta}$ el VaR agregado de la cartera.</i>
r^*	<i>Peso del reparto del VaR agregado bajo la metodología propuesta en el Capítulo 7.</i>
\hat{r}	<i>Peso del reparto del capital agregado, $\hat{r} = \frac{k^d}{k} = \frac{r\tilde{\eta} - \tilde{\mu}}{\tilde{\eta} - \tilde{\mu}}$, siendo $\tilde{\mu}$, $\tilde{\eta}$ y $\tilde{k} = \tilde{\eta} - \tilde{\mu}$ la media, VaR y capital agregados de la cartera.</i>
\hat{r}^*	<i>Peso del reparto del capital agregado bajo la metodología propuesta en el Capítulo 7.</i>
λ	<i>Ratio de diversificación, $\lambda = 1 - k^d/k$.</i>
ω_t	<i>Coeficientes de ponderación en la metodología de reparto del capital propuesta en el Capítulo 7, $t = 1, \dots, T$.</i>

Bibliografía

- [1] ACERBI, C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1505–1518.
- [2] ACERBI, C., AND TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1487–1503.
- [3] ALLEN, L., DELONG, G., AND SAUNDERS, A. Issues in the credit risk modeling of retail markets. *Journal of Banking & Finance* 28, 4 (2004), 727–752.
- [4] ALTMAN, E. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *The Journal of Finance* 23, 4 (1968), 589–609.
- [5] ALTMAN, E., RESTI, A., AND SIRONI, A. Default recovery rates in credit risk modelling: a review of the literature and empirical evidence. *Economic Notes* 33, 2 (2004), 183–208.
- [6] AMATO, J., AND FURFINE, C. Are credit ratings procyclical? *Journal of Banking & Finance* 28, 11 (2004), 2641–2677.
- [7] AMEMIYA, T. Qualitative response models. *NBER Working Papers* (1975).
- [8] ANDERSSON, F., MAUSSER, H., ROSEN, D., AND URYASEV, S. Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion. *Mathematical Programming* 89, 2 (2001), 273–291.
- [9] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J., AND HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9, 3 (1999), 203–228.
- [10] BADE, B., ROSCH, D., AND SCHEULE, H. Default and recovery risk dependencies in a simple credit risk model. *European Financial Management* 17, 1 (2011), 120–144.
- [11] BANGIA, A., DIEBOLD, F., KRONIMUS, A., SCHAGEN, C., AND SCHUERMANN, T. Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing. *Journal of Banking & Finance* 26, 2 (2002), 445–474.
- [12] BARNHILL, T., AND MAXWELL, W. Modeling correlated market and credit risk in fixed income portfolios. *Journal of Banking & Finance* 26, 2-3 (2002), 347–374.

- [13] BCBS. Basel II: International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework. *Bank for International Settlements* (2006).
- [14] BCBS. Range of practices and issues in economic capital frameworks. *BCBS Working Papers* (2009).
- [15] BCBS. Basel III: International framework for liquidity risk measurement, standards and monitoring. *Bank for International Settlements* (2010).
- [16] BCBS. Developments in modelling risk aggregation. *BCBS Working Papers* (2010).
- [17] BCBS. Vendor models for credit risk measurement and management. *BCBS Working Papers* (2010).
- [18] BCBS. Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems - revised version. *Bank for International Settlements* (2011).
- [19] BEE, M. Adaptive Importance Sampling for simulating copula-based distributions. *Insurance: Mathematics and Economics* 48, 2 (2011), 237–245.
- [20] BERD, A., ENGLE, R., AND VORONOV, A. The underlying dynamics of credit correlations. *The Journal of Credit Risk* 3, 2 (2007), 27–62.
- [21] BERKOWITZ, J. A coherent framework for stress-testing. *FED Working Papers* (1999).
- [22] BLUHM, C., OVERBECK, L., AND WAGNER, C. *An introduction to credit risk modeling*. CRC Press, 2003.
- [23] BLUME, M., LIM, F., AND MACKINLAY, A. The declining credit quality of U.S. corporate debt: Myth or reality? *The Journal of Finance* 53, 4 (1998), 1389–1413.
- [24] BONFIM, D. Credit risk drivers: Evaluating the contribution of firm level information and of macroeconomic dynamics. *Journal of Banking & Finance* 33, 2 (2009), 281–299.
- [25] BOYES, W., HOFFMAN, D., AND LOW, S. An econometric analysis of the bank credit scoring problem. *Journal of Econometrics* 40, 1 (1989), 3–14.
- [26] BRUCHE, M., AND GONZÁLEZ-AGUADO, C. Recovery rates, default probabilities, and the credit cycle. *Journal of Banking & Finance* 34, 4 (2010), 754–764.
- [27] BURTSCHELL, X., GREGORY, J., AND LAURENT, J. Beyond the Gaussian copula: Stochastic and local correlation. *The Journal of Credit Risk* 3, 1 (2005), 31–62.
- [28] CALEM, P., AND LACOUR-LITTLE, M. Risk-based capital requirements for mortgage loans. *Journal of Banking & Finance* 28, 3 (2004), 647–672.

- [29] CALVO, G. Servicing the public debt: The role of expectations. *American Economic Review* 78, 4 (1988), 647–661.
- [30] CAREY, M. Credit risk in private debt portfolios. *The Journal of Finance* 53, 4 (1998), 1363–1387.
- [31] CAREY, M. A guide to choosing absolute bank capital requirements. *Journal of Banking & Finance* 26, 5 (2002), 929–951.
- [32] CAREY, M., AND HRYCAY, M. Parameterizing credit risk models with rating data. *Journal of Banking & Finance* 25, 1 (2001), 197–270.
- [33] CASELLA, G., AND GEORGE, E. Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician* 46, 3 (1992), 167–174.
- [34] CEBS. Guidelines on stress testing (cp32). *Committee of European Banking Supervisors* (2009).
- [35] CÉSPÉDES, J., HERRERO, J., KREININ, A., AND ROSEN, D. A simple multi-factor ‘factor adjustment’ for the treatment of credit capital diversification. *The Journal of Credit Risk* 2, 3 (2006), 57–85.
- [36] CHAVA, S., STEFANESCU, C., AND TURNBULL, S. Modeling the loss distribution. *Management Science* 57, 7 (2011), 1267–1287.
- [37] CHERNY, A. Capital allocation and risk contribution with discrete-time coherent risk. *Mathematical Finance* 19, 1 (2009), 13–40.
- [38] COWAN, A., AND COWAN, C. Default correlation: An empirical investigation of a subprime lender. *Journal of Banking & Finance* 28, 4 (2004), 753–771.
- [39] CROOK, J., AND MOREIRA, F. Checking for asymmetric default dependence in a credit card portfolio: A copula approach. *Journal of Empirical Finance* 18, 4 (2011), 728–742.
- [40] CROSBIE, P., AND BOHN, J. Modeling default risk. *KMV Corporation* (1999).
- [41] CROUHY, M., GALAI, D., AND MARK, R. A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking & Finance* 24, 1-2 (2000), 59–117.
- [42] CROUHY, M., GALAI, D., AND MARK, R. Prototype risk rating system. *Journal of Banking & Finance* 25, 1 (2001), 47–95.
- [43] DANÍELSSON, J. The emperor has no clothes: Limits to risk modelling. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1273–1296.
- [44] DAS, S., DUFFIE, D., KAPADIA, N., AND SAITA, L. Common failings: How corporate defaults are correlated. *The Journal of Finance* 62, 1 (2007), 93–117.
- [45] DAS, S., FREED, L., AND GENG, G. Impact of correlated default risk on credit portfolios. *The Journal of Fixed Income* 11, 3 (2001), 9–19.

- [46] DAVIS, M., AND LO, V. Infectious defaults. *Quantitative Finance* 1, 4 (2001), 382–387.
- [47] DE SERVIGNY, A., AND RENAULT, O. *Measuring and managing credit risk*. McGraw-Hill Professional, 2004.
- [48] DEMBO, A., DEUSCHEL, J., AND DUFFIE, D. Large portfolio losses. *Finance and Stochastics* 8, 1 (2004), 3–16.
- [49] DENAULT, M. Coherent allocation of risk capital. *The Journal of Risk* 4 (2001), 1–34.
- [50] DIAMOND, D., AND DYBVIK, P. Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *The Journal of Political Economy* 91, 3 (1983), 401–419.
- [51] DIETSCH, M., AND PETEY, J. The credit risk in SME loans portfolios: Modeling issues, pricing, and capital requirements. *Journal of Banking & Finance* 26, 2-3 (2002), 303–322.
- [52] DRUMOND, I. Bank capital requirements, business cycle fluctuations and the basel accords: A synthesis. *Journal of Economic Surveys* 23, 5 (2009), 798–830.
- [53] DUELLMANN, K., KÜLL, J., AND KUNISCH, M. Estimating asset correlations from stock prices or default rates: Which method is superior? *Journal of Economic Dynamics and Control* 34, 11 (2010), 2341–2357.
- [54] DUFFIE, D., ECKNER, A., HOREL, G., AND SAITA, L. Frailty correlated default. *The Journal of Finance* 64, 5 (2009), 2089–2123.
- [55] DUFFIE, D., SAITA, L., AND WANG, K. Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates. *Journal of Financial Economics* 83, 3 (2007), 635–665.
- [56] DUFFIE, D., AND SINGLETON, K. Modeling term structures of defaultable bonds. *Review of Financial Studies* 12, 4 (1999), 687–720.
- [57] EBNÖTHER, S., AND VANINI, P. Credit portfolios: What defines risk horizons and risk measurement? *Journal of Banking & Finance* 31, 12 (2007), 3663–3679.
- [58] ELIZALDE, A., AND REPULLO, R. Economic and regulatory capital in banking: What is the difference? *International Journal of Central Banking* 3, 3 (2007), 87–117.
- [59] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., AND MIKOSCH, T. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer Verlag, 1997.
- [60] EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., AND MCNEIL, A. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, vol. 8. Elsevier, 2003, ch. 8, p. 1.

- [61] EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., AND STRAUMANN, D. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In *Risk management: value at risk and beyond*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, pp. 176–223.
- [62] EMMER, S., AND TASCHE, D. Calculating credit risk capital charges with the one-factor model. *The Journal of Risk* 7, 2 (2003), 85–101.
- [63] ENGELMANN, B. *The Basel II Risk Parameters: Estimation, Validation, Stress Testing-With Applications to Loan Risk Management*. Springer Verlag, 2011.
- [64] ESTRELLA, A. The cyclical behavior of optimal bank capital. *Journal of Banking & Finance* 28, 6 (2004), 1469–1498.
- [65] FESTIC, M., KAVKLER, A., AND REPINA, S. The macroeconomic sources of systemic risk in the banking sectors of five new E.U. member states. *Journal of Banking & Finance* 35, 2 (2011), 310–322.
- [66] FONG, T., AND WONG, C. Stress testing bank’s credit risk using mixture vector autoregressive models. *Hong Kong Monetary Authority Working Papers* (2009).
- [67] FREY, R., AND MCNEIL, A. VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: Conceptual and practical insights. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1317–1334.
- [68] FREY, R., AND MCNEIL, A. Dependent defaults in models of portfolio credit risk. *The Journal of Risk* 6 (2003), 59–92.
- [69] FREY, R., POPP, M., AND WEBER, S. An approximation for credit portfolio losses. *The Journal of Credit Risk* 4, 1 (2008), 59–76.
- [70] FRITTELLI, M., AND ROSAZZA, E. Putting order in risk measures. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1473–1486.
- [71] FUNATSU, H. Export credit insurance. *Journal of Risk and Insurance* 53, 4 (1986), 679–692.
- [72] FURMAN, E., AND ZITIKIS, R. Weighted risk capital allocations. *Insurance: Mathematics and Economics* 43, 2 (2008), 263–269.
- [73] GEWEKE, J. Efficient simulation from the multivariate normal and student-t distributions subject to linear constraints and the evaluation of constraint probabilities. In *Proceedings of the 23rd Symposium on the Interface* (1991), pp. 571–578.
- [74] GIESECKE, K., AND WEBER, S. Cyclical correlations, credit contagion, and portfolio losses. *Journal of Banking & Finance* 28, 12 (2004), 3009–3036.
- [75] GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer Verlag, 2004.
- [76] GLASSERMAN, P., HEIDELBERGER, P., AND SHAHABUDDIN, P. Asymptotically optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options. *Mathematical Finance* 9, 2 (1999), 117–152.

- [77] GLASSERMAN, P., HEIDELBERGER, P., AND SHAHABUDDIN, P. Variance reduction techniques for estimating value-at-risk. *Management Science* 46, 10 (2000), 1349–1364.
- [78] GLASSERMAN, P., KANG, W., AND SHAHABUDDIN, P. Large deviations in multifactor portfolio credit risk. *Mathematical Finance* 17, 3 (2007), 345–379.
- [79] GLASSERMAN, P., AND LI, J. Importance sampling for portfolio credit risk. *Management Science* 51, 11 (2005), 1643–1656.
- [80] GORDY, M. A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking & Finance* 24, 1-2 (2000), 119–149.
- [81] GORDY, M. Saddlepoint approximation of Creditrisk+. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1335–1353.
- [82] GORDY, M. A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation* 12, 3 (2003), 199–232.
- [83] GORDY, M., AND HOWELLS, B. Procyclicality in Basel II: Can we treat the disease without killing the patient? *Journal of Financial Intermediation* 15, 3 (2006), 395–417.
- [84] GOUTIS, C., AND CASELLA, G. Explaining the saddlepoint approximation. *The American Statistician* 53, 3 (1999), 216–224.
- [85] GUPTON, C., AND FINGER, C. Creditmetrics - Technical Document. *JP Morgan* (1997).
- [86] HACKBARTH, D., MIAO, J., AND MORELLEC, E. Capital structure, credit risk, and macroeconomic conditions. *Journal of Financial Economics* 82, 3 (2006), 519–550.
- [87] HALLERBACH, W. Decomposing portfolio value-at-risk: A general analysis. *The Journal of Risk* 5 (2003), 1–18.
- [88] HAMILTON, J. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57, 2 (1989), 357–384.
- [89] HANSON, S., PESARAN, M., AND SCHUERMANN, T. Firm heterogeneity and credit risk diversification. *Journal of Empirical Finance* 15, 4 (2008), 583–612.
- [90] HARVEY, A. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press, 1990.
- [91] HEITFIELD, E., BURTON, S., AND CHOMSISENGPHET, S. Systematic and idiosyncratic risk in syndicated loan portfolios. *The Journal of Credit Risk* 2, 3 (2006), 3–31.
- [92] HUANG, X., ZHOU, H., AND ZHU, H. A framework for assessing the systemic risk of major financial institutions. *Journal of Banking & Finance* 33, 11 (2009), 2036–2049.

- [93] JACOBSON, T., LINDÉ, J., AND ROSZBACH, K. Internal ratings systems, implied credit risk and the consistency of banks' risk classification policies. *Journal of Banking & Finance* 30, 7 (2006), 1899–1926.
- [94] JACOBSON, T., AND ROSZBACH, K. Bank lending policy, credit scoring and value-at-risk. *Journal of Banking & Finance* 27, 4 (2003), 615–633.
- [95] JAKUBIK, P., AND SCHMIEDER, C. Stress testing credit risk: Comparison of the Czech Republic and Germany. *BIS Working Papers* (2008).
- [96] JARROW, R., LANDO, D., AND TURNBULL, S. A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies* 10, 2 (1997), 481–523.
- [97] JARROW, R., AND TURNBULL, S. The intersection of market and credit risk. *Journal of Banking & Finance* 24, 1-2 (2000), 271–299.
- [98] JIMÉNEZ, G., AND MENCÍA, J. Modelling the distribution of credit losses with observable and latent factors. *Journal of Empirical Finance* 16, 2 (2009), 235–253.
- [99] JIMÉNEZ, G., AND SAURINA, J. Collateral, type of lender and relationship banking as determinants of credit risk. *Journal of Banking & Finance* 28, 9 (2004), 2191–2212.
- [100] JONES, D. Emerging problems with the Basel Capital Accord: Regulatory capital arbitrage and related issues. *Journal of Banking & Finance* 24, 1-2 (2000), 35–58.
- [101] JORION, P., AND ZHANG, G. Good and bad credit contagion: Evidence from credit default swaps. *Journal of Financial Economics* 84, 3 (2007), 860–883.
- [102] KALKBRENER, M. An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance* 15, 3 (2005), 425–437.
- [103] KIYOTAKI, N., AND MOORE, J. Credit chains. *Journal of Political Economy* 105, 21 (1997), 211–248.
- [104] KOOPMAN, S., AND LUCAS, A. Business and default cycles for credit risk. *Journal of Applied Econometrics* 20, 2 (2005), 311–323.
- [105] KOOPMAN, S., AND LUCAS, A. A non-Gaussian panel time series model for estimating and decomposing default risk. *Journal of Business and Economic Statistics* 26, 4 (2008), 510–525.
- [106] KOOPMAN, S., LUCAS, A., AND KLAASSEN, P. Empirical credit cycles and capital buffer formation. *Journal of Banking & Finance* 29, 12 (2005), 3159–3179.
- [107] KOOPMAN, S., LUCAS, A., AND SCHWAAB, B. Modeling frailty-correlated defaults using many macroeconomic covariates. *Journal of Econometrics* 162, 2 (2011), 312–325.

- [108] KRETZSCHMAR, G., MCNEIL, A., AND KIRCHNER, A. Integrated models of capital adequacy: Why banks are undercapitalised. *Journal of Banking & Finance* 34, 12 (2010), 2838–2850.
- [109] LAEVEN, L., AND MAJNONI, G. Loan loss provisioning and economic slow-downs: Too much, too late? *Journal of Financial Intermediation* 12, 2 (2003), 178–197.
- [110] LAEVEN, R., AND GOOVAERTS, M. An optimization approach to the dynamic allocation of economic capital. *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 2 (2004), 299–319.
- [111] LANDO, D. On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research* 2, 2/3 (1998), 99–120.
- [112] LANDO, D. *Credit risk modeling: Theory and applications*. Princeton University Press, 2004.
- [113] LANDO, D., AND NIELSEN, M. Correlation in corporate defaults: Contagion or conditional independence? *Journal of Financial Intermediation* 19, 3 (2010), 355–372.
- [114] LEE, S., LIN, C., AND YANG, C. The asymmetric behavior and procyclical impact of asset correlations. *Journal of Banking & Finance* 35, 10 (2011), 2559–2568.
- [115] LÖFFLER, G. The effects of estimation error on measures of portfolio credit risk. *Journal of Banking & Finance* 27, 8 (2003), 1427–1453.
- [116] LÖFFLER, G. An anatomy of rating through the cycle. *Journal of Banking & Finance* 28, 3 (2004), 695–720.
- [117] LUCAS, A., AND KLAASSEN, P. Discrete versus continuous state switching models for portfolio credit risk. *Journal of Banking & Finance* 30, 1 (2006), 23–35.
- [118] LUCAS, D. Default correlation and credit analysis. *The Journal of Fixed Income* 4, 4 (1995), 76–87.
- [119] LÜTKEBOHMERT, E. *Concentration Risk in Credit Portfolio*. Springer Verlag, 2008.
- [120] MARCELLINO, M., STOCK, J., AND WATSON, M. A comparison of direct and iterated multistep AR methods for forecasting macroeconomic time series. *Journal of Econometrics* 135, 1-2 (2006), 499–526.
- [121] MARCUCCI, J., AND QUAGLIARIELLO, M. Asymmetric effects of the business cycle on bank credit risk. *Journal of Banking & Finance* 33, 9 (2009), 1624–1635.
- [122] MCLACHLAN, G., AND PEEL, D. *Finite mixture models*. Wiley-Interscience, 2000.

- [123] MCNEIL, A., AND WENDIN, J. Bayesian inference for generalized linear mixed models of portfolio credit risk. *Journal of Empirical Finance* 14, 2 (2007), 131–149.
- [124] MCNEIL, A. J., AND SMITH, A. D. Multivariate stress scenarios and solvency. *Insurance: Mathematics and Economics* 50, 3 (2012), 299–308.
- [125] MERINO, S., AND NYFELER, M. Applying importance sampling for estimating coherent credit risk contributions. *Quantitative Finance* 4, 2 (2004), 199–207.
- [126] MERTON, R. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance* 29, 2 (1974), 449–470.
- [127] NICKELL, P., PERRAUDIN, W., AND VAROTTO, S. Stability of rating transitions. *Journal of Banking & Finance* 24, 1-2 (2000), 203–227.
- [128] NYSTRÖM, K., AND SKOGLUND, J. A credit risk model for large dimensional portfolios with application to economic capital. *Journal of Banking & Finance* 30, 8 (2006), 2163–2197.
- [129] PEÑA, D., AND BOX, G. Identifying and simplifying structure in time series. *Journal of the American Statistical Association* 82, 399 (1987), 836–843.
- [130] PEÑA, D., AND PONCELA, P. Nonstationary dynamic factor analysis. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136, 4 (2006), 1237–1257.
- [131] PEDERZOLI, C., AND TORRICELLI, C. Capital requirements and business cycle regimes: Forward-looking modelling of default probabilities. *Journal of Banking & Finance* 29, 12 (2005), 3121–3140.
- [132] PESARAN, M., SCHUERMANN, T., TREUTLER, B., AND WEINER, S. Macroeconomic dynamics and credit risk: a global perspective. *Journal of Money, Credit, and Banking* 38, 5 (2006), 1211–1261.
- [133] PEURA, S., AND JOKIVUOLLE, E. Simulation based stress tests of banks’ regulatory capital adequacy. *Journal of Banking & Finance* 28, 8 (2004), 1801–1824.
- [134] PRÁ, I., ARGUEDAS, R., RÍOS, A., AND CASALS, J. *Gestión y Control del Riesgo de Crédito con Modelos Avanzados*. Ediciones Académicas, 2010.
- [135] PUZANOVA, N., SIDDIQUI, S., AND TREDE, M. Approximate value-at-risk calculation for heterogeneous loan portfolios: Possible enhancements of the Basel II methodology. *Journal of Financial Stability* 5, 4 (2009), 374–392.
- [136] REPULLO, R., AND SUÁREZ, J. Loan pricing under Basel capital requirements. *Journal of Financial Intermediation* 13, 4 (2004), 496–521.
- [137] RIEDEL, F. Dynamic coherent risk measures. *Stochastic Processes and their Applications* 112, 2 (2004), 185–200.
- [138] ROCKAFELLAR, R., AND URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1443–1471.

- [139] RODRIGUEZ, A., AND TRUCHARTE, C. Loss coverage and stress testing mortgage portfolios: A non-parametric approach. *Journal of Financial Stability* 3, 4 (2007), 342–367.
- [140] RÖSCH, D. Correlations and business cycles of credit risk: Evidence from bankruptcies in Germany. *Financial Markets and Portfolio Management* 17, 3 (2003), 309–331.
- [141] RÖSCH, D., AND SCHEULE, H. Forecasting retail portfolio credit risk. *Journal of Risk Finance* 5, 2 (2004), 16–32.
- [142] RÖSCH, D., AND SCHEULE, H. A multi-factor approach for systematic default and recovery risk. In *The Basel II Risk Parameters*. Springer, 2006, ch. 6, pp. 105–125.
- [143] RÖSCH, D., AND SCHEULE, H. Downturn credit portfolio risk, regulatory capital and prudential incentives. *International Review of Finance* 10, 2 (2010), 185–207.
- [144] SAURINA, J., AND JIMÉNEZ, G. Credit cycles, credit risk, and prudential regulation. *International Journal of Central Banking* 2, 2 (2006), 65–98.
- [145] SCHONBUCHER, P. Taken to the limit: Simple and not-so-simple loan loss distributions. In *The Best of Wilmott 1: Incorporating the Quantitative Finance Review*, vol. 1. Wiley, 2004, ch. 11, pp. 143–160.
- [146] SCHUERMANN, T. What do we know about Loss Given Default? *Wharton Financial Institutions Center Working Papers* (2004).
- [147] SHUMWAY, T. Forecasting bankruptcy more accurately: A simple hazard model. *The Journal of Business* 74, 1 (2001), 101–124.
- [148] SINGER, J., AND WILLETT, J. It’s about time: Using discrete-time survival analysis to study duration and the timing of events. *Journal of Educational and Behavioral Statistics* 18, 2 (1993), 155–195.
- [149] SORGE, M., AND VIROLAINEN, K. A comparative analysis of macro stress-testing methodologies with application to Finland. *Journal of Financial Stability* 2, 2 (2006), 113–151.
- [150] STOUGHTON, N., AND ZECHNER, J. Optimal capital allocation using RAROC and EVA. *Journal of Financial Intermediation* 16, 3 (2007), 312–342.
- [151] SUNDMACHER, M., AND ELLIS, C. Bank ratings arbitrage: Is LGD a blind spot in economic capital calculations? *International Review of Financial Analysis* 20, 1 (2011), 6–11.
- [152] SZEGÖ, G. Measures of risk. *Journal of Banking & Finance* 26, 7 (2002), 1253–1272.
- [153] TASCHE, D. Capital allocation to business units and sub-portfolios: The Euler principle. In *Pillar II in the New Basel Accord: The Challenge of Economic Capital* (2007), R. Books, Ed., pp. 423–453.

- [154] TERCEIRO, J. *Estimation of dynamic econometric models with errors in variables*. Springer Verlag, 1990.
- [155] TSAIG, Y., LEVY, A., AND WANG, Y. Analyzing the impact of credit migration in a portfolio setting. *Journal of Banking & Finance* 35, 12 (2011), 3145 – 3157.
- [156] TURNBULL, S. Pricing loans using default probabilities. *Economic Notes* 32, 2 (2003), 197–217.
- [157] VASICEK, O. Probability of loss on loan portfolio. *KMV Corporation* (1987).
- [158] VASICEK, O. Loan portfolio value. *Risk* 15, 12 (2002), 160–162.
- [159] WALTERS, P. *An introduction to ergodic theory*. Springer Verlag, 2000.
- [160] WILDE, T. Creditrisk+: A credit risk management framework. *Credit Suisse Financial Products* (1997).
- [161] WILSON, T. Credit portfolio risk (I, II). *Risk* 10, 9,10 (1997).
- [162] YAMAI, Y., AND YOSHIBA, T. Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective. *Journal of Banking & Finance* 29, 4 (2005), 997–1015.
- [163] ZAIK, E., WALTER, J., RETTING, G., AND JAMES, C. RAROC at Bank of America: From theory to practice. *Journal of Applied Corporate Finance* 9, 2 (1996), 83–93.
- [164] ZELLNER, A. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. *Journal of the American Statistical Association* 57, 298 (1962), 348–368.
- [165] ZHOU, C. An analysis of default correlations and multiple defaults. *Review of Financial Studies* 14, 2 (2001), 555–576.